

# TÓPICOS DE FÍSICA

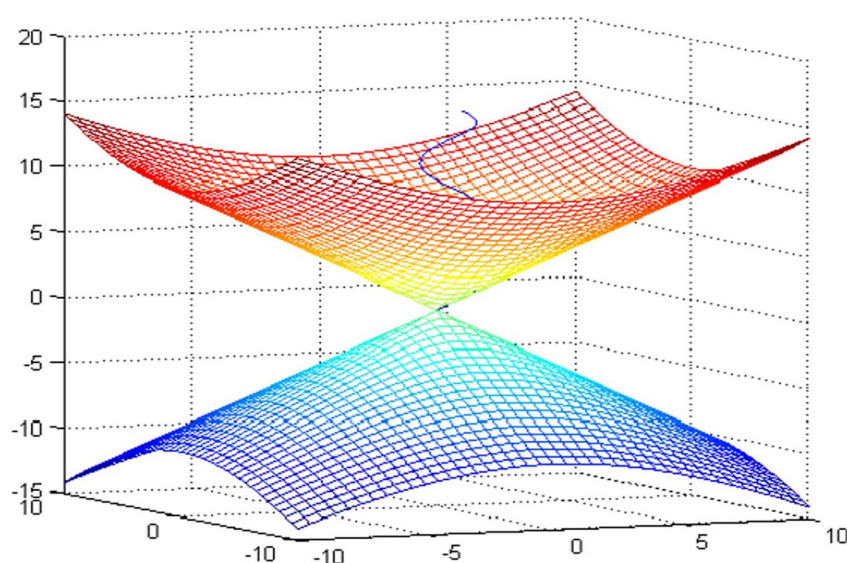
**Mecânica Clássica**

**Electromagnetismo**

**Física Relativista**

**Introdução à Física Quântica**

**Constantes, Formulários e Tabelas**



**Gustavo Monteiro da Silva**

Edição Digital  
Abril 2008  
Lisboa  
Portugal

## FICHA TÉCNICA

### **Título**

“Tópicos de Física – Edição Electrónica”  
Copyright © 2008 do autor

### **Autor**



Gustavo Vitorino Monteiro da Silva  
Engenheiro Electrotécnico  
Mestre em Engenharia Electrotécnica e de Computadores  
e-mail: [gustavo.silva@fxs.pt](mailto:gustavo.silva@fxs.pt)

Foto do autor: Luís Silva, FXS

### **Capa**



FXS, Gestão de Marketing, Lda.  
Rua Prof. Mark Athias, 4, 3º Frente  
1600-646 LISBOA – PORTUGAL  
Tel: 210 185 159 Fax: 217 599 327  
[www.fxs.pt](http://www.fxs.pt) e-mail: [info@fxs.pt](mailto:info@fxs.pt)

**ISBN: 978-972-99862-5-3**

Lisboa, 2 de Abril de 2008

ao meu neto Henrique

## PREFÁCIO

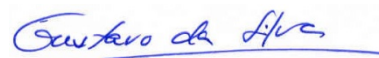
Este pequeno livro surge na sequência de dar a conhecer o trabalho realizado com a leccionação da disciplina de Complementos de Física, da antiga licenciatura bi-etápica em Automação Controlo e Instrumentação (ACI) da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal do Instituto Politécnico de Setúbal.

Das obras já desenvolvidas são de realçar, para além das publicações de carácter pedagógico, efectuadas no âmbito das disciplinas leccionadas, os livros de Instrumentação Industrial 1ª edição (1999), Processamento Digital de Sinais (2000), Controlo Não Linear (2003) e Instrumentação Industrial 2ª edição (2004).

Este trabalho não constitui de modo algum um tratado sobre Física, pois não abarca alguns assuntos fundamentais que uma obra desse tipo deveria conter, como por exemplo Termodinâmica, Óptica e outros. Constitui sim um pequeno conjunto de tópicos que foram leccionados durante alguns anos numa determinada disciplina que fazia parte do elenco curricular do curso de ACI.

Em cada capítulo são apresentados alguns problemas de aplicação que pretendem estimular o aluno, ou o leitor, a repensar na teoria exposta e a consolidar a sua compreensão. Os problemas do último capítulo foram resolvidos utilizando o Matlab, que é de entre os programas de cálculo científico que conheço aquele apresenta uma grande versatilidade e elevado potencial, ao mesmo tempo que é extremamente fácil de utilizar.

O Autor



# CONTEÚDO

	Pág.
<b>1. MECÂNICA CLÁSSICA .....</b>	<b>1</b>
1.1. CINEMÁTICA .....	1
1.2. MOVIMENTO NUM PLANO .....	4
1.2.1. <i>Coordenadas polares</i> .....	4
1.2.2. <i>Coordenadas normais</i> .....	5
1.2.3. <i>Movimento circular</i> .....	5
1.2.4. <i>Movimento circular uniforme</i> .....	6
1.3. DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA MATERIAL .....	6
1.4. MOVIMENTOS RELATIVOS .....	7
1.4.1. <i>Posição da partícula</i> .....	8
1.4.2. <i>Velocidade da partícula</i> .....	8
1.4.3. <i>Aceleração da partícula</i> .....	9
1.4.4. <i>A 2ª lei de Newton</i> .....	10
1.4.5. <i>Relatividade de Galileu</i> .....	10
1.4.6. <i>Transformação de Galileu</i> .....	10
1.5. TRABALHO E ENERGIA .....	11
1.5.1. <i>Trabalho</i> .....	11
1.5.2. <i>Energia cinética</i> .....	12
1.5.3. <i>Impulso de uma força</i> .....	12
1.5.4. <i>Campo gravítico</i> .....	12
1.5.5. <i>Potencial e energia potencial</i> .....	13
1.5.6. <i>Conservação da energia</i> .....	14
1.5.7. <i>Atracção universal</i> .....	14
1.5.8. <i>Movimentos com atrito</i> .....	15
1.5.9. <i>Momento angular de uma partícula material</i> .....	16
1.6. DINÂMICA DOS SISTEMAS .....	19
1.6.1. <i>Movimento do centro de inércia</i> .....	19
1.6.2. <i>Teorema do momento linear</i> .....	20
1.6.3. <i>Colisões entre partículas e explosões</i> .....	21
1.6.4. <i>Teorema do momento angular</i> .....	22
1.6.5. <i>Energia de rotação</i> .....	23
1.7. APÊNDICE .....	24
1.8. PROBLEMAS RESOLVIDOS .....	25
1.8.1. <i>Probl. 1. 1 – Movimento rectilíneo</i> .....	25
1.8.2. <i>Probl. 1. 2 – Movimento circular</i> .....	27
1.8.3. <i>Probl. 1. 3 – Movimentos relativos</i> .....	29
1.8.4. <i>Probl. 1. 4 – Movimentos relativos</i> .....	30
1.8.5. <i>Probl. 1. 5 – Movimento de um projectil</i> .....	31
1.8.6. <i>Probl. 1. 6 - Queda de um grave</i> .....	32
1.8.7. <i>Probl. 1. 7 – Movimento de um projectil</i> .....	34
1.8.8. <i>Probl. 1. 8 - Movimento de um projectil</i> .....	35
1.8.9. <i>Probl. 1. 9 – Energia cinética e potencial</i> .....	37
1.8.10. <i>Probl. 1. 10 – Movimento circular uniforme</i> .....	38
1.8.11. <i>Probl. 1. 11 – Movimento circular uniforme</i> .....	39
1.8.12. <i>Probl. 1. 12 – Movimento circular uniforme</i> .....	40
1.8.13. <i>Probl. 1. 13 – Movimentos relativos</i> .....	41

1.8.14. Probl. 1. 14 – Mov. circ. unif. – Satélites GPS .....	44
1.8.15. Probl. 1. 15 – Força e trabalho .....	46
1.8.16. Probl. 1. 16 – Força e energia .....	47
1.8.17. Probl. 1. 17 – Atracção universal .....	48
1.8.18. Probl. 1. 18 - Conservação do momento linear .....	49
1.8.19. Probl. 1. 19 - Conservação da energia .....	51
1.8.20. Probl. 1. 20 - Conservação da energia .....	53
1.8.21. Probl. 1. 21 – Mov. Circular e energia cinética .....	54
1.8.22. Probl. 1. 22 – Energia de rotação .....	55
1.8.23. Probl. 1. 23 – Atrito .....	56
1.8.24. Probl. 1. 24 – Pêndulo balístico .....	57
1.8.25. Probl. 1. 25 – Movimento de rotação e translação .....	58
1.8.26. Probl. 1. 26 – Conservação do momento linear .....	59
1.8.27. Probl. 1. 27 – Conservação do momento angular .....	60
<b>2. ELECTROMAGNETISMO .....</b>	<b>61</b>
2.1. ELECTROSTÁTICA .....	61
2.1.1. Carga eléctrica .....	61
2.1.2. Lei de Coulomb <sup>0</sup> .....	62
2.1.3. Campo eléctrico .....	62
2.1.4. Densidade de carga .....	63
2.1.5. Movimento de uma partícula carregada num campo eléctrico .....	64
2.2. FLUXO DO CAMPO ELÉCTRICO .....	65
2.2.1. Fluxo de um vector .....	65
2.2.2. Circulação de um vector .....	65
2.2.3. Teorema de Stokes .....	66
2.2.4. Fluxo do Campo Eléctrico e lei de Gauss .....	66
2.2.5. Condutores em equilíbrio electrostático .....	68
2.2.6. Ângulo sólido e lei de Gauss .....	68
2.3. POTENCIAL ELÉCTRICO E CAPACIDADE .....	69
2.3.1. Energia potencial .....	69
2.3.2. Diferença de potencial .....	69
2.3.3. Potencial devido a uma carga .....	69
2.3.4. Potencial devido a uma distribuição de cargas .....	70
2.3.5. Capacidade e condensadores .....	71
2.4. CONDUTORES E CORRENTE ELÉCTRICA .....	73
2.4.1. Corrente eléctrica .....	73
2.4.2. Lei de ohm .....	74
2.4.3. Energia e potência .....	75
2.4.4. Leis de Kirchhoff .....	76
2.5. CAMPO MAGNÉTICO .....	77
2.5.1. Introdução .....	77
2.5.2. Força exercida sobre a carga eléctrica .....	77
2.5.3. Força exercida sobre a corrente eléctrica .....	78
2.5.4. Movimento de uma partícula num campo magnético .....	78
2.5.5. O efeito de Hall .....	79
2.5.6. A lei de Biot-Savart .....	79
2.5.7. Força magnética entre dois condutores paralelos .....	80
2.5.8. Lei de Ampere .....	81
2.5.9. Lei de Gauss do campo magnético .....	81
2.5.10. Generalização da lei de Ampere .....	82
2.5.11. O magnetismo na matéria .....	82
2.6. AS EQUAÇÕES DE MAXWELL .....	83
2.6.1. A lei da indução, de Faraday .....	83
2.6.2. Lei de Lenz .....	83

2.6.3. As equações de Maxwell na forma integral .....	83
2.6.4. As equações de Maxwell na forma diferencial.....	84
2.6.5. Ondas electromagnéticas.....	85
2.6.6. O espectro das ondas electromagnéticas .....	86
2.7. FENÓMENOS PERIÓDICOS .....	87
2.7.1. Exemplos de fenómenos periódicos .....	87
2.7.2. Representação analítica e gráfica .....	87
2.7.3. O sinal sinusoidal .....	88
2.7.4. A série de Fourier .....	90
2.7.5. O movimento harmónico simples .....	91
2.8. CIRCUITOS EM CORRENTE ALTERNADA.....	93
2.8.1. Tensão alternada sinusoidal .....	93
2.8.2. Tensão e corrente numa resistência.....	94
2.8.3. Tensão e corrente numa bobina.....	95
2.8.4. Tensão e corrente num condensador .....	97
2.8.5. Circuito RLC série.....	99
2.8.6. Energia e potência.....	101
2.8.7. Energia armazenada.....	102
2.9. TRANSFORMADOR .....	103
2.9.1. Descrição.....	103
2.9.2. Equações instantâneas.....	103
2.9.3. Transformador ideal.....	104
2.10. CIRCUITOS TRIFÁSICOS .....	106
2.10.1. Sistemas trifásicos.....	106
2.10.2. Valores instantâneos.....	106
2.10.3. Diagramas vectoriais.....	107
2.10.4. Ligações em estrela e triângulo .....	109
2.11. LINHA DE TRANSMISSÃO.....	110
2.11.1. Descrição e caracterização .....	110
2.11.2. Equações da linha bifilar.....	110
2.11.3. Factor de reflexão.....	112
2.11.4. Propagação de impulsos numa linha.....	113
2.12. PROBLEMAS RESOLVIDOS .....	115
2.12.1. Problema 2. 1 – Cálculo do número de cargas.....	115
2.12.2. Problema 2. 2 – Força eléctrica e gravítica .....	115
2.12.3. Problema 2. 3 – Forças e medição da carga eléctrica .....	116
2.12.4. Problema 2. 4 – Dipolo eléctrico.....	118
2.12.5. Problema 2. 5 – Carga sujeita a força eléctrica.....	119
2.12.6. Problema 2. 6 – Campo eléctrico de uma carga.....	120
2.12.7. Problema 2. 7 – Potencial de uma carga.....	121
2.12.8. Problema 2. 8 – Potencial de uma esfera isolante.....	122
2.12.9. Problema 2. 9 – Potencial de uma esfera condutora .....	123
2.12.10. Problema 2. 10 – Potencial de 2 esferas concêntricas .....	125
2.12.11. Problema 2. 11 – Potencial e diferença de potencial .....	125
2.12.12. Problema 2. 12 – Campo eléctrico e capacidade entre 2 placas .....	127
2.12.13. Problema 2. 13 – Capacidade de condensadores .....	128
2.12.14. Problema 2. 14 – Aplicação numérica do problema anterior.....	129
2.12.15. Problema 2. 15 – Efeito do dieléctrico num condensador .....	130
2.12.16. Problema 2. 16 – Condensador com 2 dieléctricos .....	131
2.12.17. Problema 2. 17 – Resistência de um condutor.....	132
2.12.18. Problema 2. 18 – Tensões e correntes alternadas .....	133
2.12.19. Problema 2. 19 - Circuito RLC série .....	134
2.13. PROBLEMAS PROPOSTOS .....	136
2.13.1. Problema 2. 20 – Dipolo.....	136
2.13.2. Problema 2. 21 – Cargas.....	136
2.13.3. Problema 2. 22 – Descarga de condensador .....	136

2.13.4. Problema 2. 23 – Resistência.....	136
2.13.5. Problema 2. 24 – Associação de resistências .....	136
2.13.6. Problema 2. 25 – Associação de bobinas .....	136
2.13.7. Problema 2. 26 – Associação de condensadores .....	137
2.13.8. Problema 2. 27 – Força electromagnética sobre carga, 1.....	137
2.13.9. Problema 2. 28 – Força electromagnética sobre carga, 2.....	137
2.13.10. Problema 2. 29 – Força sobre uma espira.....	137
2.13.11. Problema 2. 30 – Campo magnético produzido por uma corrente.....	137
2.13.12. Problema 2. 31 – Barra em movimento num campo magnético .....	138
2.13.13. Problema 2. 32 – Força de uma corrente sobre condutores.....	138
2.13.14. Problema 2. 33 – Aplicação da lei de Ampere.....	138
2.13.15. Problema 2. 34 – Aplicação da lei de Gauss do campo magnético .....	138
2.13.16. Problema 2. 35 - Transformador .....	138
2.13.17. Problema 2. 36 – F.e.m. numa bobina em movimento em $B$ .....	139
2.13.18. Problema 2. 37 – Linha bifilar, 1.....	139
2.13.19. Problema 2. 38 – Linha bifilar, 2.....	140
2.13.20. Problema 2. 39 – Ondas electromagnéticas, 1 .....	140
2.13.21. Problema 2. 40 – Ondas electromagnéticas, 2 .....	140

### 3. FÍSICA RELATIVISTA..... 141

3.1. INTRODUÇÃO .....	141
3.2. TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU .....	142
3.3. A VELOCIDADE DA LUZ.....	143
3.4. OS POSTULADOS DE TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA .....	144
3.5. O TEMPO DE UM REFERENCIAL.....	144
3.5.1. Sincronização de relógios.....	145
3.5.2. Simultaneidade de acontecimentos .....	145
3.5.3. Dilatação do tempo.....	146
3.5.4. O paradoxo dos gémeos.....	148
3.5.5. A contracção do espaço.....	148
3.5.6. O diagrama espaço-tempo.....	149
3.5.7. O efeito de Döpler.....	150
3.6. TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ .....	150
3.6.1. Equações de transformação de coordenadas.....	151
3.6.2. Equações de transformação de velocidade.....	152
3.7. MOMENTO LINEAR E LEIS DE NEWTON .....	153
3.8. ENERGIA .....	155
3.9. ELECTROMAGNETISMO E RELATIVIDADE .....	158
3.10. TEORIA DA RELATIVIDADE GENERALIZADA .....	160
3.11. PROBLEMAS RESOLVIDOS .....	163
3.11.1. Probl. 3.1 – Comprimento próprio .....	163
3.11.2. Probl. 3.2 – Tempo próprio .....	164
3.11.3. Probl. 3.3 – Tempo e comprimento próprios .....	165
3.11.4. Probl. 3.4 – Diagrama espaço-tempo, 2D.....	166
3.11.5. Probl. 3.5 – Diagrama espaço-tempo, 3D.....	167
3.11.6. Probl. 3.6 – Composição de velocidades, 1 .....	168
3.11.7. Probl. 3.7 – Composição de velocidades, 2 .....	168
3.11.8. Probl. 3.8 – Composição de velocidades, 3 .....	170
3.11.9. Probl. 3.9 – Composição de velocidades, 4 .....	171
3.11.10. Probl. 3.10 – Simultaneidade.....	172
3.11.11. Probl. 3.11 – Momento linear.....	173
3.11.12. Probl. 3.12 – $E_c$ clássica / $E_c$ relativista .....	174
3.11.13. Probl. 3.13 – Desintegração de partículas, 1 .....	175
3.11.14. Probl. 3.14 – Desintegração de partículas, 2 .....	176
3.11.15. Probl. 3.15 – Energia de uma partícula .....	176

3.11.16. Probl. 3.16 – Energia e velocidade de electrões.....	177
3.11.17. Probl. 3.17 – Conversão massa-energia, 1.....	177
3.11.18. Probl. 3.18 – Conversão massa-energia, 2.....	178
3.11.19. Probl. 3.19 – Energia cinética e tempo próprio.....	179
3.11.20. Probl. 3.20 – Velocidade e massa-energia.....	180
3.11.21. Probl. 3.21 – Conversão massa-energia.....	180
3.11.22. Probl. 3.22 – Massa-energia e momento linear.....	181
3.11.23. Probl. 3.23 – Energia e comprimento.....	182
3.11.24. Probl. 3.24 – Força e aceleração.....	183
3.11.25. Probl. 3.25 – Efeito de Döppler, 1.....	185
3.11.26. Probl. 3.26 – Efeito de Döppler, 2.....	186
3.11.27. Probl. 3.27 – Raio gravitacional.....	187
3.11.28. Probl. 3.28 – Equivalência entre E e B.....	188

#### 4. INTRODUÇÃO À FÍSICA QUÂNTICA ..... 189

4.1. RADIAÇÃO DO CORPO NEGRO.....	189
4.1.1. Corpo negro.....	189
4.1.2. Lei de Stefan.....	190
4.1.3. Lei Rayleigh-Jeans.....	191
4.1.4. Lei do deslocamento de Wien.....	191
4.1.5. Lei de radiação de Planck.....	191
4.2. EFEITO FOTOELÉCTRICO.....	193
4.3. ESPECTROS DOS GASES.....	195
4.4. EFEITO DE COMPTON.....	197
4.5. O ÁTOMO DE HIDROGÉNIO.....	201
4.6. ONDAS DE MATÉRIA.....	206
4.7. PRINCÍPIO DA INCERTEZA.....	207
4.8. FUNÇÃO DE ONDA.....	208
4.9. EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER.....	211
4.10. PRINCÍPIOS DA MECÂNICA QUÂNTICA.....	215
4.11. PROBLEMAS RESOLVIDOS.....	217
4.11.1. Probl. 4.1.....	217
4.11.2. Probl. 4.2.....	218
4.11.3. Probl. 4.3.....	218
4.11.4. Probl. 4.4.....	220
4.11.5. Probl. 4.5.....	221
4.11.6. Probl. 4.6.....	222
4.11.7. Probl. 4.7.....	223
4.11.8. Probl. 4.8.....	224
4.11.9. Probl. 4.9.....	224
4.11.10. Probl. 4.10.....	225
4.11.11. Probl. 4.11.....	225
4.11.12. Probl. 4.12.....	226
4.11.13. Probl. 4.13.....	227
4.11.14. Probl. 4.14.....	228
4.11.15. Probl. 4.15.....	228
4.11.16. Probl. 4.16.....	229
4.11.17. Probl. 4.17.....	230
4.11.18. Probl. 4.18.....	230
4.11.19. Probl. 4.19.....	231
4.11.20. Probl. 4.20.....	231
4.11.21. Probl. 4.21.....	232
4.11.22. Probl. 4.22.....	233
4.11.23. Probl. 4.23.....	233
4.11.24. Probl. 4.24.....	234

4.11.25. <i>Probl. 4.25</i> .....	234
4.11.26. <i>Probl. 4.26</i> .....	235
4.11.27. <i>Probl. 4.27</i> .....	236
4.11.28. <i>Probl. 4.28</i> .....	237
<b>5. CONSTANTES, FORMULÁRIOS E TABELAS.....</b>	<b>239</b>
5.1. CONSTANTES MATEMÁTICAS .....	239
5.2. CONSTANTES FUNDAMENTAIS DA FÍSICA.....	239
5.3. FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA .....	240
5.3.1. <i>Álgebra elementar</i> .....	240
5.3.2. <i>Logaritmos e exponenciais</i> .....	240
5.3.3. <i>Geometria</i> .....	240
5.3.4. <i>Limites</i> .....	240
5.3.5. <i>Séries</i> .....	241
5.3.6. <i>Trigonometria</i> .....	241
5.3.7. <i>Derivadas</i> .....	241
5.3.8. <i>Integrais indefinidos</i> .....	242
5.4. FORMULÁRIO DE FÍSICA .....	243
5.4.1. <i>Mecânica dos sólidos</i> .....	243
5.4.2. <i>Mecânica dos fluidos</i> .....	243
5.4.3. <i>Electrotecnia</i> .....	243
5.5. TABELA PERIÓDICA DE ELEMENTOS .....	245
5.6. TABELA DE CONVERSÃO DE UNIDADES .....	246
5.7. CARACTERÍSTICAS DE ALGUNS MATERIAIS .....	248
5.8. ESCRITA DOS NÚMEROS E UNIDADES.....	249
5.8.1. <i>Algarismos significativos</i> .....	249
5.8.2. <i>Notação científica</i> .....	250
5.8.3. <i>Arredondamentos</i> .....	250

# 1. MECÂNICA CLÁSSICA

Dá-se o nome de *Mecânica* ao ramo da Física onde se estudam os movimentos dos corpos, e as forças a eles associadas. A *Mecânica Clássica* restringe-se a corpos com velocidades significativamente inferiores à velocidade da luz no vácuo e a corpos cujas dimensões são bastante superiores às dos átomos constituintes da matéria.

É habitual considerar-se a Mecânica Clássica dividida em três áreas: A Cinemática, a Dinâmica e a Estática.

A *Cinemática* trata do estudo do movimento, no sentido geométrico, sem atender às causas que o originaram. Na *Dinâmica* procura relacionar-se o movimento com as forças que o originaram ou que ele origina. Na *Estática* estuda-se o equilíbrio de forças de modo a que não haja movimento.

## 1.1. Cinemática

Para descrever o movimento de um corpo utiliza-se um referencial. *Referencial* é um sistema de eixos coordenados associados a um corpo rígido. O sistema de coordenadas pode ser qualquer: cartesiano, cilíndrico, polar, etc. Os eixos podem ser ortogonais ou não, formar um triedro directo ou não.

Ao estudar o movimento de um corpo sólido, por vezes associa-se este a uma partícula material.

*Partícula material* é um corpo sólido de dimensões desprezáveis (em relação ao espaço em que se está a estudar o movimento).

*Espaço do referencial* é o conjunto de pontos rigidamente ligados ao referencial.

O espaço de um referencial é tridimensional. Em determinadas aplicações poderão usar-se apenas espaços a duas e até mesmo uma dimensão.

No estudo dos movimentos é importante conhecer os intervalos de tempo durante os quais os mesmos decorrem.

*Tempo do referencial* é a sucessão de instantes, ilimitada, marcados por um cronómetro. Admite-se o tempo do referencial como sendo *contínuo*, com um determinado início ( $t \in \mathbb{R}^+$ ).

Um *acontecimento* ocorre no espaço e no tempo de um referencial. Uma partícula material é localizada num referencial pelas suas *coordenadas de espaço* e pela *coordenada de tempo*.

Na Mecânica Clássica o tempo é o mesmo em todos os referenciais.

Seja o referencial S associado a um sistema de coordenadas cartesianas; para uma cula material tem-se a **posição da partícula** (Fig. 1.1)

$$P = P(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

Mas  $P(t) = O + \mathbf{r}(t)$  e  $\mathbf{r} = P - O$ , donde

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.2)$$

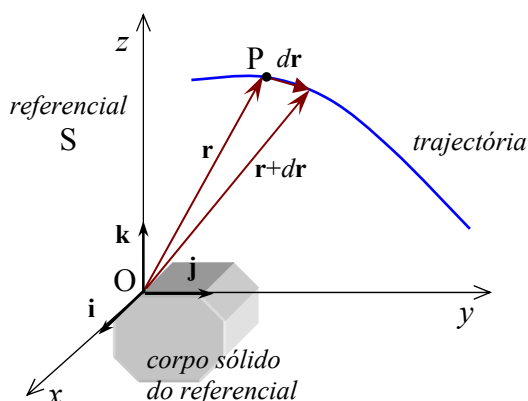


Fig. 1.1 – Referencial e posição de uma partícula material

As **equações paramétricas** do ponto material em movimento são dadas pelas equações

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

A **trajectória** (Fig. 1.1) obtém-se por eliminação do tempo  $t$  nas equações anteriores:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1.4)$$

Um referencial não tem que estar associado a coordenadas cartesianas ortogonais com um triedro directo, pode estar a muitos outros. Indica-se a seguir um sistema muito usado, o de coordenadas polares.

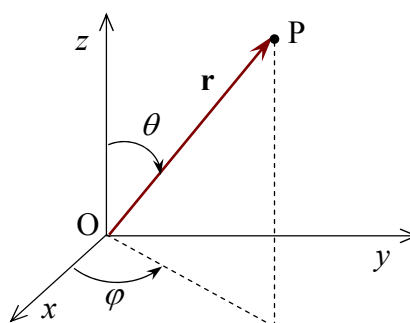


Fig. 1.2 – Posição de uma partícula em coordenadas polares

Ao localizar um ponto material em **coordenadas polares** utilizam-se habitualmente as letras  $r$ ,  $\varphi$  e  $\theta$ , como se indica na Fig. 1.2. As transformações de coordenadas são

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.5)$$

e suas inversas.

Para localizar um objecto em relação ao nosso planeta é usual usar-se a latitude ( $0^\circ$  Equador,  $90^\circ$  Pólo Norte), a longitude ( $0^\circ$  meridiano de Greenwich,  $\pm 180^\circ$  E/W) e a altitude (0 pés significa que um avião está no solo). É um caso particular do sistema de coordenadas polares, com  $r =$  raio da Terra + altitude,  $\varphi =$  longitude e  $\theta = 90^\circ -$  latitude).

Para se saber como é que a posição de uma partícula varia com o decorrer do tempo introduz-se o conceito de velocidade.

**Velocidade da partícula** <sup>(1)</sup> é, por definição, a variação temporal da posição da partícula:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.6)$$

Logo, num referencial cartesiano,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt} \mathbf{k} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t) \mathbf{i} + v_y(t) \mathbf{j} + v_z(t) \mathbf{k} \quad (1.8)$$

**Celeridade** é o módulo da velocidade. Tem-se  $v = \frac{ds}{dt}$ , em que  $s$  representa a trajectória.

**Trajectória** – é o conjunto das sucessivas posições da partícula.

A equação da trajectória *muda* quando se muda de referencial. A velocidade é, em cada instante, *tangente à trajectória*.

**Partícula em repouso:**  $P$  é fixo no referencial ( $\mathbf{r}$  é constante). A sua velocidade é nula. A partícula poderá estar em repouso num determinado referencial e não o estar num outro referencial.

**Partícula em movimento** –  $P$  varia com o decorrer do tempo. Admite-se que a variação decorre de forma contínua. Para ver como varia a velocidade de uma partícula material introduz-se o conceito de aceleração.

**Aceleração da partícula**, é por definição,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.9)$$

ou

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \mathbf{k} \quad (1.10)$$

<sup>1</sup> Em inglês chama-se “velocity”, designando-se por “speed” o seu módulo

ou ainda 
$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z(t)}{dt} \mathbf{k} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} \quad (1.12)$$

## 1.2. Movimento num plano

### 1.2.1. Coordenadas polares

Para a partícula material em movimento é  $P(t)$ . **Posição:** coordenadas  $r$  e  $\theta$ . Vectors unitários:  $\mathbf{r}_1$ ,  $\boldsymbol{\theta}_1$  (ambos com as dimensões de um comprimento). ( $r_1$  com a direcção e o sentido de  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_1$  perpendicular a  $r_1$ , sentido directo)  $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$  ( $r$  é o módulo de  $\mathbf{r}$ ).

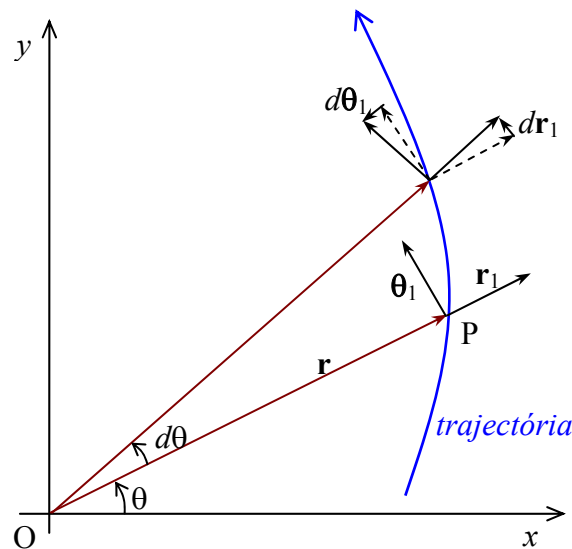


Fig. 1.3 – Movimento num plano – coordenadas polares

**Velocidade:** 
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{r}_1 + r \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

$d\mathbf{r}_1$  é normal a  $\mathbf{r}_1$ , com o sentido de  $\boldsymbol{\theta}_1$  e grandeza  $d\theta$ :  $d\mathbf{r}_1 = d\theta \boldsymbol{\theta}_1$

Logo: 
$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{r}_1 + r \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\theta}_1 \quad (1.13)$$

**Aceleração:** 
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{r}_1 + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\theta}_1 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \boldsymbol{\theta}_1 + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\boldsymbol{\theta}_1}{dt}$$

Mas  $d\boldsymbol{\theta}_1 = -d\theta \mathbf{r}_1$ . Logo,

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{r}_1 + \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \boldsymbol{\theta}_1 \quad (1.14)$$

### 1.2.2. Coordenadas normais

Por vezes interessa exprimir a aceleração segundo as componentes tangencial e normal à trajectória:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = a_t \mathbf{t} + a_n \mathbf{n} \quad (1.15)$$

A componente tangencial da aceleração está relacionada com a variação do módulo da velocidade, enquanto a componente normal se relaciona com a variação da direcção:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \mathbf{t} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (1.17)$$

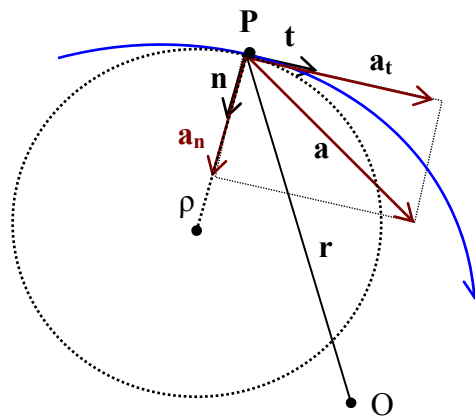


Fig. 1.4 – Movimento num plano – coordenadas normais

Considerando a circunferência coincidente com a trajectória, no ponto P (de raio  $\rho$ ) verifica-se que  $d\mathbf{t} = d\theta \mathbf{n}$  e  $ds = \rho d\theta$ , pelo que  $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}$ , e portanto

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n} \quad (1.18)$$

Considere-se o caso em que  $a_n=0$ . Neste caso a direcção da velocidade não varia, apenas o seu módulo muda. Diz-se que se trata de um **movimento rectilíneo**. Se além disto se tiver  $a_t=0$  diz-se que se tem um **movimento rectilíneo uniforme**.

### 1.2.3. Movimento circular

Neste tipo de movimento  $\rho$  é constante; chame-se-lhe  $r$ . (ver secção 1.2.1). Definindo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.19)$$

vem, de (1.16) e de  $ds = \rho d\theta$ ,  $\mathbf{v} = r \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\theta}_1$ , ou ainda,

$$\mathbf{v} = \omega r \boldsymbol{\theta}_1 \quad (1.20)$$

Para a aceleração vem, a partir de (1.17)  $\mathbf{a} = -r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{r}_1 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \boldsymbol{\theta}_1$ , ou ainda

$$\mathbf{a} = -\omega^2 r \mathbf{r}_1 + \frac{d\omega}{dt} \boldsymbol{\theta}_1 \quad (1.21)$$

Muitas vezes considera-se um vector  $\boldsymbol{\omega}$  com a grandeza  $\omega$ , dirigido segundo a normal à trajectória, passando pelo seu centro de curvatura e com um sentido tal que um observador estendido no seu sentido vê o movimento efectuar-se da direita para a esquerda. Nestas condições é

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.22)$$

#### 1.2.4. Movimento circular uniforme

Neste tipo de movimento é  $\omega = \text{constante}$ , resultando pois para a velocidade uma equação igual a (1.20)

$$\mathbf{v} = \omega r \boldsymbol{\theta}_1 \quad (1.23)$$

E para a aceleração

$$\mathbf{a} = -\omega^2 r \mathbf{r}_1 \quad (1.24)$$

Em módulo tem-se  $v = \omega r$  e  $a = \omega^2 r$ .

### 1.3. Dinâmica de uma partícula material

**Dinâmica** – é o estudo do movimento, atendendo às causas que o originaram.

**Força** – acção mecânica que se exerce sobre uma partícula material ou sobre um sistema de partículas.

A força tem um carácter vectorial e, na mecânica clássica, está associada a um espaço tridimensional; é-lhe atribuído um sentido (segundo o conceito geométrico) e um módulo.

Sobre um corpo material podem actuar vários tipos de forças: forças gravíticas, forças electromagnéticas e forças de outro tipo como por exemplo tensões de cabos de ligação, reacções de apoio, forças de atrito, etc.

Como se verá já a seguir, a aceleração de uma partícula está intimamente relacionada com as forças que sobre ela se encontram aplicadas.

Considere-se uma partícula material em movimento num determinado referencial (partícula que eventualmente poderá estar em repouso). Os estudos experimentais efectuados com base no movimento dos corpos celestes, dos projecteis de artilharia e outros, conduziram a fundar a mecânica com base em três princípios, também conhecidos por leis de Newton da Mecânica:

**1ª lei de Newton** – (princípio da inércia): Uma partícula material não submetida a forças tem um movimento de aceleração nula, ou seja, rectilíneo e uniforme.

**2ª lei de Newton** – Uma partícula material sujeita a uma ou mais forças tem, em cada instante, uma aceleração proporcional à resultante destas forças.

**3ª lei de Newton** – (princípio da igualdade da acção e reacção): As acções mútuas que duas partículas materiais  $P_1$  e  $P_2$  exercem uma sobre a outra são sempre representadas por duas forças iguais e directamente opostas (acção e reacção), aplicadas respectivamente em  $P_1$  e em  $P_2$ .

A 2ª lei de Newton é a chamada *lei fundamental da dinâmica*. O coeficiente de proporcionalidade entre a resultante das forças e a aceleração é, por definição, a *massa da partícula*. É uma constante característica da partícula. A expressão analítica desta lei é:

$$m \frac{d^2 P}{dt^2} = \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{ou ainda} \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1.25)$$

em que:  $\mathbf{F}$  – resultante (somatório) das forças que actuam sobre a partícula,  
 $m$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$  – *massa*, *velocidade* e *aceleração* da partícula.

Definem-se as seguintes quantidades:

– Momento linear da partícula material:  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  (1.26)

– Quantidade de aceleração da partícula:  $m\mathbf{a}$  (1.27)

– *Força de inércia* associada à partícula:  $-\mathbf{ma}$  (1.28)

A 2ª lei de Newton pode assim escrever-se

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \quad (1.29)$$

Cujo significado é o seguinte:

*Para uma partícula material em movimento existe, em cada instante, um equilíbrio entre a resultante das forças aplicadas à partícula e a sua força de inércia.*

### 1.4. Movimentos Relativos

Nesta secção vai-se procurar exprimir, em termos do referencial  $S_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$ , a velocidade de uma partícula material; a velocidade da partícula é conhecida no referencial  $S(O, x, y, z)$ , do qual se conhece a lei de movimento em relação a  $S_0$ .

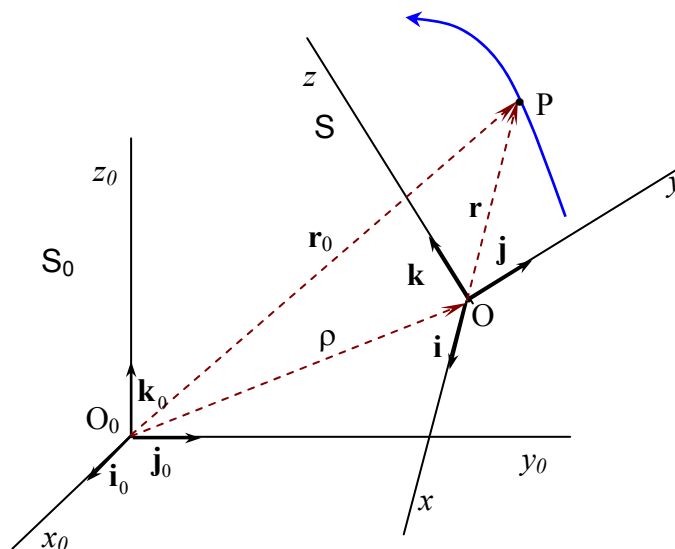


Fig. 1.5 – Movimentos relativos

### 1.4.1. Posição da partícula

$$\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\rho} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\rho} + \sum_{xyz} x\mathbf{i} \quad (1.30)$$

### 1.4.2. Velocidade da partícula

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \sum_{xyz} x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \sum_{xyz} \frac{dx}{dt} \mathbf{i} \quad (1.31)$$

Mas  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$   $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$   $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$  (produto interno dos versores por si próprios); logo, derivando as relações anteriores pode escrever-se

$$\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0 \quad \mathbf{j} \cdot \frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}}{dt} &\text{ existe no plano } (\mathbf{j}, \mathbf{k}): \text{ Faça-se } \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega_z \mathbf{j} - \omega_y \mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} &\text{ existe no plano } (\mathbf{k}, \mathbf{i}): \text{ Faça-se } \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega_x \mathbf{k} - \omega_z \mathbf{i} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &\text{ existe no plano } (\mathbf{i}, \mathbf{j}): \text{ Faça-se } \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega_y \mathbf{i} - \omega_x \mathbf{j} \end{aligned}$$

Estas relações simplificam-se se for introduzido o vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \quad (1.32)$$

ficando  $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$

A expressão da velocidade fica assim

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \sum_{xyz} \frac{dx}{dt} \mathbf{i}$$

Como o último termo representa a velocidade relativa da partícula em S, fica finalmente

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r \quad (1.33)$$

Fazendo  $\mathbf{v}_t = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  (designada por **velocidade de transporte**), obtém-se o teorema da composição das velocidades:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r \quad (1.34)$$

No caso particular em que o ponto  $P = O + \mathbf{r}$  está fixo no referencial S, a sua velocidade no referencial  $S_0$  é dada por

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.35)$$

Considerem-se agora dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  em movimento no referencial S. Será

$$\begin{aligned} P_1 &= O + \mathbf{r}_{01} = O + \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_1 \\ P_2 &= O + \mathbf{r}_{02} = O + \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  definem um vector  $\mathbf{b}(t)$  tal que  $\mathbf{b} = P_2 - P_1 = \mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

A velocidade destes pontos exprime-se por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{01} &= \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_{r1} \\ \mathbf{v}_{02} &= \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_{r2} \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{v}_{02} - \mathbf{v}_{01} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{v}_{r2} - \mathbf{v}_{r1}$$

$$\text{ou } \left( \frac{dP_1}{dt} - \frac{dP_2}{dt} \right)_{S_0} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \left( \frac{d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{dt} \right)_S \quad \text{ou ainda} \quad \left( \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right)_{S_0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} + \left( \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right)_S$$

A operação de derivação de um vector em  $S_0$  equivale à aplicação do operador

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_S + \boldsymbol{\omega} \times \tag{1.36}$$

### 1.4.3. Aceleração da partícula

Viu-se, (1.33), que  $\mathbf{v}_0 = \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r$ . Vai calcular-se a aceleração em  $S_0$  derivando  $\mathbf{v}_0$ :

$$\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}$$

$$\text{Mas } \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \left( \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_S \quad \text{pelo que fica}$$

$$\mathbf{a}_0 = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \left( \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_S$$

$$\mathbf{a}_0 = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \left( \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_S$$

$$\mathbf{a}_0 = \underbrace{\ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_t} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r}_{\mathbf{a}_c} + \underbrace{\left( \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_S}_{\mathbf{a}_r} \tag{1.37}$$

A aceleração da partícula material no referencial  $S_0$  consta de 3 componentes principais (teorema da composição das acelerações):

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_t = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad \textit{aceleração de transporte}$$

$$\mathbf{a}_c = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad \textit{aceleração complementar ou aceleração de Coriolis}$$

$$\mathbf{a}_r = \left( \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_S \quad \textit{aceleração relativa} \quad (\text{é o valor da aceleração no referencial S})$$

#### 1.4.4. A 2ª lei de Newton

No referencial  $S_0$ :  $\mathbf{f} = m \mathbf{a}_0$

Pela composição das acelerações vem, substituindo  $\mathbf{a}_0$ :  $\mathbf{f} = m (\mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c)$

Definindo:  $\mathbf{f}_t = -m \mathbf{a}_t$  força de inércia de transporte e  
 $\mathbf{f}_c = -m \mathbf{a}_c$  força de inércia complementar

vem  $\mathbf{f} = m \mathbf{a}_r - \mathbf{f}_t - \mathbf{f}_c$  ou seja  $\mathbf{f} + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_c = m \mathbf{a}_r$

Definindo  $\mathbf{f}_r = \mathbf{f} + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_c$  fica

$$\mathbf{f}_r = m \mathbf{a}_r$$

A lei de Newton fica com a mesma forma que no referencial  $S_0$ .

#### 1.4.5. Relatividade de Galileu

Quais as condições para que o movimento da partícula em S seja regido por uma equação análoga à do movimento em  $S_0$ , com o mesmo valor da força?

Observando as equações anteriores conclui-se que  $\mathbf{f}_t$  e  $\mathbf{f}_c$  deverão ser nulas em qualquer instante.

$$\mathbf{f}_c = -m \mathbf{a}_c = -2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (\text{o referencial S descreve um movimento de translação em relação a } S_0)$$

$$\mathbf{f}_t = -m \mathbf{a}_t = -m (\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0 \wedge \boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{p}} = 0$$

(o referencial S descreve um movimento de translação uniforme em relação a  $S_0$ )

Os referenciais que se encontram em movimento retilíneo e uniforme uns em relação aos outros designam-se por **referenciais de inércia**.

Princípio da relatividade de Galileu:

*A equação fundamental da dinâmica conserva a mesma forma, com o mesmo valor da força, em todos os referenciais de inércia.*

#### 1.4.6. Transformação de Galileu

Chama-se **transformação de Galileu** à expressão que representa a transformação de coordenadas entre dois referenciais de inércia.

Considerando o caso simplista em que nos dois referenciais de inércia S e S' os eixos dos xx são colineares, (um referencial encontra-se em movimento em relação ao outro, com velocidade constante), como se mostra na Fig. 1.6.

Da figura conclui-se que

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

Logo

$$v' = v - u$$

Ou seja, se as origens dos referenciais coincidirem em  $t = 0$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$$

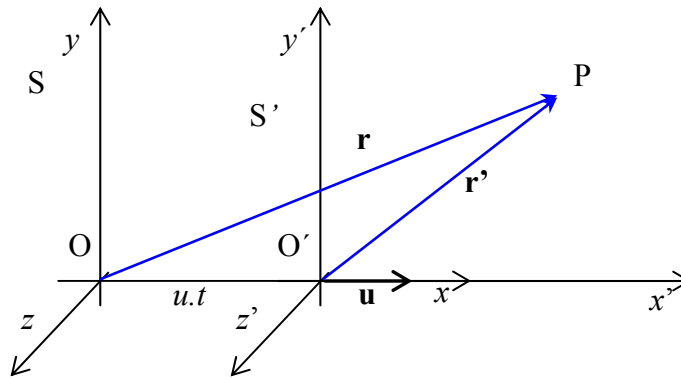


Fig. 1.6 – Transformação de Galileu

e portanto

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.38)$$

A última equação,  $t' = t$ , não é obtida da figura anterior, mas constitui uma hipótese da Física Clássica: **o tempo é igual em todos os referenciais.**

## 1.5. Trabalho e Energia

### 1.5.1. Trabalho

Num referencial qualquer considere-se uma força  $\mathbf{F}$ , variável ou não, *constantemente aplicada* a uma partícula material em movimento.

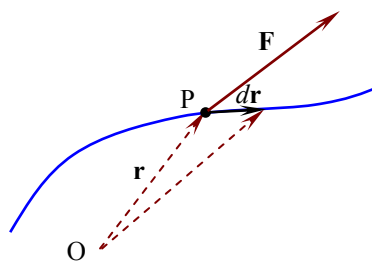


Fig. 1.7 – Definição de trabalho elementar

Designando por  $d\mathbf{r}$  o deslocamento efectuado pela partícula durante o intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , define-se **trabalho elementar** efectuado pela força  $\mathbf{F}$ , pelo produto interno

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.39)$$

Designando por  $\mathbf{F}$  a resultante das forças que actuam sobre a partícula, num determinado referencial  $S_0$ , a 2ª lei de Newton permite escrever

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

Substituindo na equação anterior vem

$$dW = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt \rightarrow dW = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) dt$$

### 1.5.2. Energia cinética

Dá-se o nome de **energia cinética da partícula**, no instante  $t$ , ao escalar

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.40)$$

Integrando a última equação da secção anterior entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  obtém-se

$$\int_{t_1}^{t_2} dW = W_{12} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (1.41)$$

Esta equação exprime o **teorema da força viva**:

*Num referencial  $S_0$ , o trabalho efectuado pela resultante das forças aplicadas a uma partícula material, durante o intervalo de tempo  $t_2-t_1$ , é igual à variação da sua energia cinética.*

### 1.5.3. Impulso de uma força

Considere-se uma força  $\mathbf{F}$  a actuar sobre um corpo durante um intervalo de tempo elementar  $dt$ . Define-se **impulso** dessa força,  $d\mathbf{I}$ , pelo produto da força pelo tempo  $dt$  durante o qual ela actua:

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F} dt \quad (1.42)$$

O conceito de impulso assume uma importância particular quando se trata de forças de grande intensidade a actuar durante um tempo muito curto, durante o qual não se conhece exactamente a evolução da força com o tempo. É no entanto possível medir o seu efeito, por exemplo medindo a variação de velocidade que sofre o corpo sujeito a essa força.

### 1.5.4. Campo gravítico

Diz-se que numa região do espaço existe um **campo de forças** sempre que a presença de uma partícula material permite detectar a existência de uma força a exercer-se sobre ela. A **grandeza** ou **intensidade do campo** é expressa pela força que se exerce sobre uma partícula de **massa unitária**.

Num campo de forças será  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z, t)$ .

Considerem-se dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  num campo de forças e calcule-se o trabalho realizado pelo campo para transportar uma partícula material desde  $P_1$  até  $P_2$ :

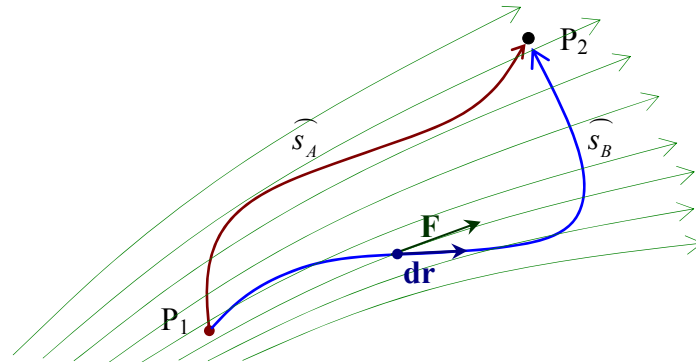


Fig. 1.8 – Trabalho realizado de P<sub>1</sub> a P<sub>2</sub>

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{P_1 P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

De um modo geral o valor deste integral depende da trajetória seguida, pelo que esta deverá ser tomada em conta.

Acontece porém que em muitos casos de importância prática este trabalho (realizado pelo campo) é independente da trajetória seguida. Diz-se então que se está em presença de um **campo conservativo** (ou que se trata de **forças conservativas**).

### 1.5.5. Potencial e energia potencial

No caso de um campo ser conservativo (a força por unidade de massa é aqui representada por **F**) será

$$\int_{s_A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ou ainda

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Mas o **teorema de Stokes** diz que a circulação de um vector ao longo de um circuito fechado, com início e fim no mesmo ponto, é igual ao fluxo do seu rotacional através de *qualquer* superfície que se apoie nesse contorno. Assim, a relação anterior implica que

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0$$

pelo que se pode considerar

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V \tag{1.43}$$

Note-se que  $\text{rot}(\text{grad } X) \equiv 0$ , qualquer que seja  $X$ . O sinal  $-$  é introduzido por conveniência, para se obter a equação (1.43) com a forma com que aparece adiante.

À grandeza  $V=V(x,y,z,t)$ , *escalar*, dá-se o nome de **potencial gravítico** ou **potencial**.

À grandeza

$$E_p = m V \tag{1.44}$$

dá-se o nome de **energia potencial**. Atendendo a (1.43) é costume dizer-se que num campo conservativo a *força deriva de um potencial*.

### 1.5.6. Conservação da energia

Para um campo conservativo o trabalho realizado pelo campo para transportar uma partícula material desde  $P_1$  até  $P_2$  será assim independente da trajectória e dado por

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \text{grad } V \cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = -\int_{P_1}^{P_2} dV = V_1 - V_2$$

Considerando as forças a actuar sobre a massa  $m$ , e atendendo a (1.41) fica

$$mV_1 - mV_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow mV_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mV_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

ou ainda,

$$E_{p_1} + E_{c_1} = E_{p_2} + E_{c_2} = E_t \quad (1.45)$$

À grandeza  $E_t$ , soma da energia potencial da partícula com a sua energia cinética chama-se **energia total** da partícula material.

A equação anterior exprime o **princípio da conservação da energia mecânica**:

*Num campo conservativo a energia total mantém-se constante.*

### 1.5.7. Atracção universal

As partículas materiais interactuam entre si: neste momento interessa-nos a chamada **interacção gravitacional**. Este fenómeno, observado e estudado de há longa data, é também conhecido como **lei da atracção universal** e também como **lei da atracção de Newton**. É ele o responsável pelo peso dos corpos, pela estabilidade do sistema solar, pelo equilíbrio no movimento dos satélites nas órbitas, e por uma imensidão de fenómenos do dia a dia.

Considerando apenas duas partículas materiais, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , esta lei afirma o seguinte:

*A matéria atrai matéria na razão directa das massas e na razão inversa do quadrado das distâncias.*

Esta lei representa-se assim pela expressão

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.46)$$

em que  $F$  representa o módulo da força de atracção entre as partículas,  $r$  a distância entre os seus centros de massas e  $G$  é designada **constante de atracção universal**:  $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ .

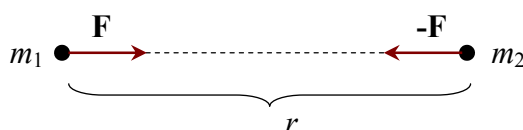


Fig. 1.9 – Lei da Atracção Universal

Devido ao princípio da acção e reacção esta força manifesta-se aplicada a cada uma das partículas e é dirigida para a outra partícula, como se indica na Fig. 1.9.

O campo gravítico originado num ponto  $P(\mathbf{r})$  por uma partícula material de massa  $m$ , situada na origem do referencial, será dado por

$$\mathbf{F}_m = -\frac{Gm}{r^2} \mathbf{r}_1 \quad (1.47)$$

em que  $\mathbf{r}_1$  é o vector unitário dirigido da origem para a partícula. Note-se que esta equação se obtém da anterior fazendo  $m_2 = 1$ , uma vez que o campo se detecta pela força que se exerce sobre a partícula de massa unitária.

Ao trabalho realizado pelo campo para transportar uma partícula de massa unitária desde o infinito até à posição corrente, à distância  $r$  da origem, dá-se o nome de **potencial gravítico** associado à partícula  $m$ .

Será então  $V = \int_{\infty}^r \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = \int_{\infty}^r -\frac{Gm}{r^2} dr = \left[ \frac{Gm}{r} \right]_{\infty}^r$ , pelo que fica

$$V = \frac{Gm}{r} \quad (1.48)$$

### 1.5.8. Movimentos com atrito

Quando sobre um corpo é aplicada uma força  $\mathbf{F}$ , paralela à superfície de apoio, e este não se move, conclui-se que sobre ele actua uma força, simétrica de  $\mathbf{F}$ , que traduz a reacção tangencial da superfície de apoio sobre o corpo,  $\mathbf{R}_t$ , e que se opõe ao movimento deste. A reacção tangencial das superfícies em contacto designa-se por força de atrito,  $\mathbf{F}_a$ .

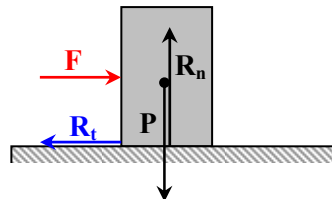


Fig. 1.10 –Força de atrito estático

#### 1.5.8.1. Força de atrito estático

A força mínima, que é necessário aplicar a um corpo para que este fique na iminência de entrar em movimento tem intensidade igual ao valor máximo da reacção tangencial da superfície de apoio,  $R_t$ .

Este valor máximo da reacção tangencial designa-se por **força de atrito estático**,  $F_{ae}$ .

São as seguintes as características da força de atrito estático:

- A intensidade da força de atrito estático é independente da área das superfícies em contacto.
- A intensidade da força de atrito estático é directamente proporcional à intensidade da reacção normal,  $R_n$ , e depende da natureza dos materiais em contacto

$$F_{ae} = \mu_e R_n \quad (1.49)$$

onde  $\mu_e$ , se designa por **coeficiente de atrito estático**; este coeficiente depende apenas da natureza dos materiais em contacto.

### 1.5.8.2. Força de atrito cinético

Supondo que a intensidade da força vai aumentando progressivamente, de forma contínua, a partir do instante em que o corpo passa do estado de repouso ao estado de movimento, a intensidade da força,  $F$ , a que deve estar submetido para que se mova com velocidade constante, é menor do que a intensidade da força aplicada para o retirar do repouso. Conclui-se, então, que a intensidade da força de atrito que se manifesta com o corpo em movimento, e que se designa por **força de atrito cinético**,  $F_{ac}$ , é inferior à intensidade da força de atrito estático.

São as seguintes as características da força de atrito cinético:

- A intensidade da força de atrito cinético é independente da área das superfícies em contacto.
- A intensidade da força de atrito cinético é, para velocidades moderadas, independente do valor da velocidade do corpo.
- A intensidade da força de atrito cinético é directamente proporcional à reacção normal.

$$F_{ac} = \mu_c R_n$$

onde  $\mu_c$  é chamado **coeficiente de atrito cinético**; este depende apenas da natureza dos materiais em contacto.

## 1.5.9. Momento angular de uma partícula material

### 1.5.9.1. Definição

Num determinado referencial considere-se um ponto fixo,  $O$ , e uma partícula material de massa  $m$ , animada de uma velocidade  $v$ . Define-se **momento angular** dessa partícula **em relação ao ponto  $O$**  pela expressão

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad (1.50)$$

em que  $\mathbf{r}$  é o vector de posição da partícula e  $\mathbf{p}$  o seu momento linear,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .

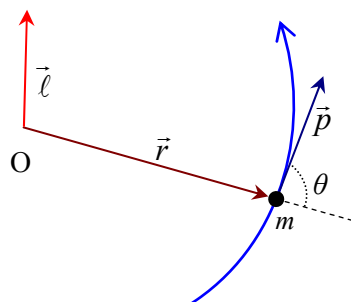


Fig. 1.11 – Momento angular de uma partícula material

Repare-se que  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{\ell}$  formam um triedro directo. Da definição tira-se

$$\ell = r p \sin \theta \quad (1.51)$$

A sua norma é dada pelo produto das normas de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  e do seno do ângulo formado pelos vectores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ .

### 1.5.9.2. Partícula em movimento rectilíneo

No caso em que a partícula material descreve uma trajectória rectilínea com velocidade constante, que não passa por O, o momento angular é independente da posição da partícula na sua trajectória [ver Fig. 1.12 e expressão (1.51)].

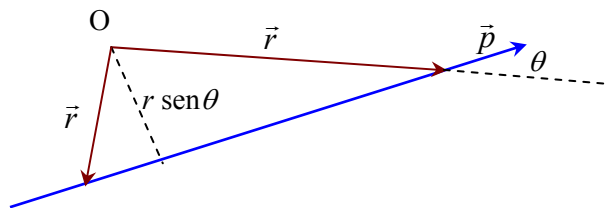


Fig. 1.12 – Momento angular de uma partícula material em movimento rectilíneo

### 1.5.9.3. Partícula em movimento circular

Neste caso  $\mathbf{v}$  é perpendicular a  $\mathbf{r}$ , pelo que fica apenas

$$\ell = mrv$$

Como  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  o vector velocidade angular é perpendicular ao plano de rotação. O momento angular toma o aspecto

$$\vec{\ell} = mr^2 \vec{\omega}$$

O momento angular é pois um vector perpendicular ao plano da trajectória.

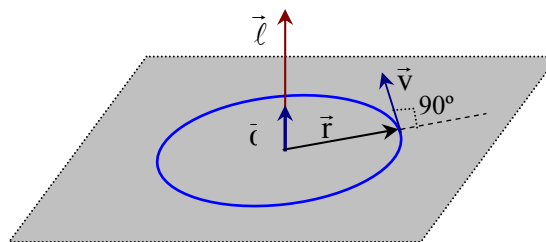


Fig. 1.13 – Momento angular de uma partícula material em movimento circular

Definindo a grandeza escalar, designada por **momento de inércia** da partícula,

$$I = mr^2 \quad (1.52)$$

pode escrever-se

$$\vec{\ell} = I \vec{\omega} \quad (1.53)$$

Esta equação é formalmente análoga à que representa a 2ª lei de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ . O momento de inércia de uma partícula em movimento de rotação exprime a oposição que esta apresenta em modificar o seu estado de movimento angular.

#### 1.5.9.4. Variação do momento angular de uma partícula

Considere-se o caso geral, em que uma partícula de massa  $m$  descreve uma trajectória variável, e calcule-se a variação do seu momento de inércia em relação a um ponto fixo do referencial. Será

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Como  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  tem-se  $\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = 0$ , pelo que fica  $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$ . Mas, da 2ª lei de Newton

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ , pelo que se obtém  $\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ . Notando que  $\vec{r} \wedge \vec{F}$  representa o momento da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $O$ , que se representará por  $\vec{N}$ , pode escrever-se

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{N} \quad (1.54)$$

Esta equação traduz a lei da variação do momento angular de uma partícula material:

*Em relação a um determinado ponto, o momento da força que actua sobre a partícula é igual à variação do seu momento angular em ordem ao tempo.*

#### 1.5.9.5. Momento de um binário

Dá-se o nome de **binário** a um sistema constituído por duas forças simétricas com linhas de acção paralelas.

Como as forças têm direcções paralelas e são simétricas, a soma dos momentos de cada uma das forças é igual ao momento de uma das forças em relação a um ponto contido na linha de acção da outra força:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (1.55)$$

Chamando  $b$  (braço do binário) à distância entre as linhas de acção das duas forças, vem

$$M = bF \quad (1.56)$$

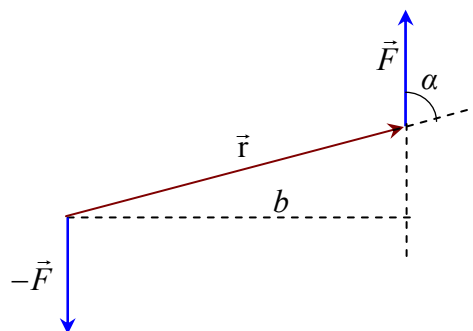


Fig. 1.14 – Momento de um binário

## 1.6. Dinâmica dos Sistemas

### 1.6.1. Movimento do centro de inércia

Considere-se um conjunto discreto de  $N$  partículas materiais,  $P_i$ . Num determinado referencial a posição da partícula  $P_i$  é definida pelo vector  $\mathbf{r}_i$ . As distâncias entre as partículas podem variar com o decorrer do tempo; não se trata necessariamente um sistema rígido.

Designa-se por  $m_i$  a massa da partícula  $P_i$ . A massa é um escalar cujo valor é independente do referencial escolhido.

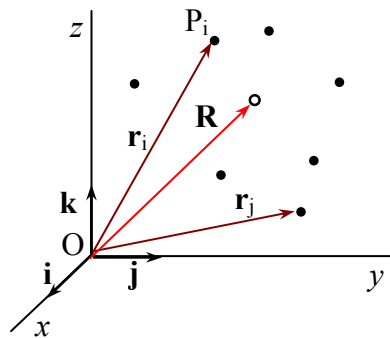


Fig. 1.15 – Sistema de partículas materiais

A todo o instante cada partícula está sujeita a um conjunto de forças. Para a partícula  $i$ , as forças que sobre ela actuam são:

$\sum_{j=1}^N \mathbf{f}_{ij}$  – soma das forças devidas às outras partículas. São forças interiores ao sistema. A

força que uma partícula exerce sobre si própria,  $\mathbf{f}_{ii}$  é nula;

$\mathbf{f}_i^e$  – resultante das forças exteriores que actuam sobre a partícula  $i$ .

De acordo com a 2ª lei de Newton, a equação do movimento da partícula  $i$  é dada por

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \sum_j \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_i^e \quad (1.57)$$

Somando ambos os membros desta equação para todas as partículas do sistema vem

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \right) = \sum_{i,j} \mathbf{f}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^e \quad (1.58)$$

Pela 3ª lei de Newton (princípio da acção e reacção),  $\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0$ . Por este motivo, o 1º termo do 2º membro de (1.58) é nulo. O 2º termo do 2º membro representa a resultante das forças exteriores ao sistema, que sobre ele actuam; Designa-se esta resultante por  $\mathbf{F}^e$ .

Define-se **centro de inércia** <sup>(2)</sup> do sistema de partículas materiais pela expressão

<sup>2</sup> Também designado por *centro de massas*, *centro de gravidade* ou *baricentro*.

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (1.59)$$

O somatório do denominador representa a massa do sistema de partículas:  $M = \sum_{i=1}^N m_i$ .

A velocidade do centro de inércia é dada por

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (1.60)$$

A aceleração do centro de inércia é dada por

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \quad (1.61)$$

Combinando a equação (1.61) com a equação (1.58) resulta

$$M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}^e \quad (1.62)$$

No caso de se tratar de um corpo sólido contínuo, ao elemento de volume  $dV$ , de massa volúmica  $\rho$ , corresponde a massa elementar  $dm$ , definindo-se o centro de inércia por

$$\mathbf{R} = \frac{\int_V \mathbf{r} dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho dV}{M} \quad (1.63)$$

A equação (1.62), perfeitamente análoga à que exprime o movimento de uma partícula material, exprime o **teorema do movimento do centro de inércia**:

*O centro de inércia de um sistema move-se como se fosse uma partícula material de massa  $M$  submetida à acção da resultante das forças exteriores aplicadas.*

Repare-se que este resultado é válido quer o sistema de partículas se encontre rigidamente ligado ou não, como acontece, neste último caso com as moléculas de um gás.

Sempre que  $\mathbf{F}^e = 0$  (resultante das forças exteriores sobre o sistema nula) a equação (1.62) fica

$$M \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{C}^{te} \quad (1.64)$$

ou seja, o centro de inércia descreve um movimento rectilíneo e uniforme.

### 1.6.2. Teorema do momento linear

Considere-se de novo a equação (1.57) e defina-se **momento linear** da partícula  $i$  pela expressão

$$\mathbf{p}_i = m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (1.65)$$

Obtém-se assim

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_j \mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{f}_i^e \quad (1.66)$$

Somando a equação acima para todas as partículas, introduzindo o vector **momento linear do sistema**, definido pela soma dos momentos lineares de cada partícula,

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \quad (\text{para sistemas de partículas}) \quad (1.67)$$

ou 
$$\mathbf{P} = \int_V d\mathbf{p} = \int_V \dot{\mathbf{r}} dm = \int_V \rho \dot{\mathbf{r}} dV \quad (\text{para corpos contínuos}) \quad (1.68)$$

e tecendo para as forças as mesmas considerações que anteriormente, obtém-se o

**Teorema do momento linear**, ou **1º teorema geral da dinâmica**:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^e \quad (1.69)$$

*A variação no tempo do momento linear de um sistema de partículas materiais é igual à resultante das forças exteriores aplicadas ao sistema de partículas.*

Sempre que  $\mathbf{F}^e = 0$  o momento linear fica constante durante o movimento. É o chamado

**Teorema da conservação do momento linear**:

*O momento linear de um sistema de partículas permanece constante sempre que a resultante das forças exteriores aplicadas é nula.*

### 1.6.3. Colisões entre partículas e explosões

Uma **colisão** entre duas partículas é uma interacção breve<sup>(3)</sup> entre elas. Se durante esta interacção não existirem forças exteriores a actuar sobre as partículas que colidem, o momento linear mantém-se constante. No entanto a sua energia cinética poderá variar, consoante o tipo de colisão, que pode ser classificada em **colisão elástica** ou **colisão inelástica**.

#### 1.6.3.1. Colisão elástica

Neste tipo de colisão, além de haver conservação do momento linear, há conservação da energia cinética do sistema de partículas.

Designando por  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  o momento linear do sistema antes e depois da colisão, e por  $E_{c1}$  e  $E_{c2}$  as respectivas energias cinéticas, será

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \quad (1.70)$$

$$E_{c1} = E_{c2} \quad (1.71)$$

<sup>3</sup> Comparativamente com o intervalo de tempo durante o qual se efectua a observação.

### 1.6.3.2. Colisão inelástica

Neste tipo de colisão, há conservação do momento linear, mas não há conservação da energia cinética.

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \quad (1.72)$$

$$E_{c1} \neq E_{c2} \quad (1.73)$$

Se após a colisão as partículas ficarem juntas, a colisão diz-se **perfeitamente inelástica**.

### 1.6.3.3. Explosões

No caso em que um corpo sólido explode, o momento linear do corpo é igual ao momento linear do sistema constituído pelos fragmentos. Não há conservação da energia cinética.

### 1.6.4. Teorema do momento angular

Considere-se a equação (1.66) e faça-se o produto vectorial por  $\mathbf{r}_i$  de ambos os membros da equação:

$$\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^e$$

O primeiro membro pode transformar-se, atendendo a que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i$$

e que o último termo do 2º membro é nulo. Fica então

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^e \quad (1.74)$$

O vector  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$  é o **momento angular da partícula  $i$**  em relação ao ponto O.

O vector  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^e$  é o **momento da força  $\mathbf{f}_i$**  em relação ao ponto O.

Somando a equação (1.74) para todas as partículas do sistema obtém-se

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^e \quad (1.75)$$

Como aconteceu anteriormente, o 1º termo do 2º membro é nulo. Faça-se

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{N}^e = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^e) \quad (1.76)$$

O vector  $\mathbf{L}$  representa o **momento angular do sistema de partículas** em relação ao ponto O.

O vector  $\mathbf{N}^e$  representa o **momento das forças exteriores** em relação ao ponto O.

(Para corpos contínuos será  $\mathbf{L} = \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{p}$  e  $\mathbf{N}^e = \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{f}_e$ ). Deste modo pode escrever-se

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^e \quad (1.77)$$

que exprime o *teorema do momento angular*, ou *2º teorema geral da dinâmica*:

*A variação no tempo do momento angular de um sistema de partículas materiais em relação a um ponto é igual ao momento resultante das forças exteriores aplicadas ao sistema de partículas, em relação ao mesmo ponto.*

Sempre que  $\mathbf{N}^e = 0$  o momento angular fica constante durante o movimento. Obtém-se assim o

**teorema da conservação do momento angular:**

*O momento angular de um sistema de partículas em relação a um ponto permanece constante sempre que o momento resultante das forças exteriores aplicadas, em relação ao mesmo ponto for nulo.*

### 1.6.5. Energia de rotação

Imagine-se um conjunto discreto de  $N$  partículas rigidamente ligadas, em movimento de rotação. Para simplificar admita-se que a rotação se efectua em torno de um eixo fixo coincidente com o eixo de coordenadas  $z$ , como se indica na figura.

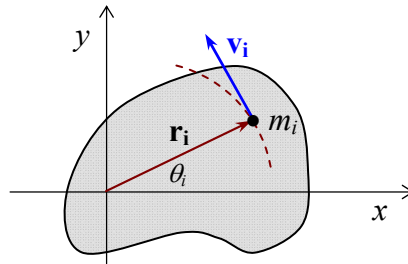


Fig. 1.16 – Rotação de partículas rigidamente ligadas

A energia cinética da partícula  $i$  é dada por

$$E_{R_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1.78)$$

A energia cinética do conjunto de todas as partículas será obtida somando a equação anterior para todas as partículas, ou seja

$$E_R = \sum_{i=1}^N E_{R_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1.79)$$

Como  $v_i = \omega r_i$ , e a velocidade angular é igual para todas as partículas (uma vez que estas se encontram rigidamente ligadas), a expressão anterior pode escrever-se

$$E_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1.80)$$

com  $I$  dado por

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (1.81)$$

A  $I$  dá-se o nome de **momento de inércia** do conjunto de  $N$  partículas em relação ao eixo  $Oz$ .

No caso de se tratar de um corpo rígido contínuo, a energia cinética da massa elementar  $dm$  será  $dE_R = \frac{1}{2} v^2 dm$ . O momento de inércia tem a expressão  $I = \int_V r^2 dm$ , ou ainda

$$I = \int_V \rho r^2 dV \quad (1.82)$$

e a energia cinética de rotação continua a ser dada pela expressão (1.80).

## 1.7. Apêndice

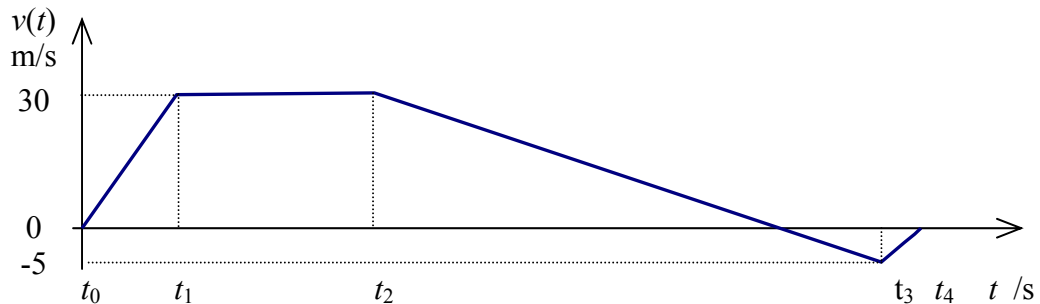
Correspondência entre algumas grandezas associadas aos movimentos de translação e de rotação.

<i>Movimento de translação</i>	<i>Movimento de rotação</i>
$x$ – posição	$\theta$ – ângulo
$v$ – velocidade linear	$\omega$ – velocidade angular
$a$ – aceleração linear	$\alpha$ – aceleração angular
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v = v_0 + a t$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$E_c = \frac{1}{2} m v^2$	$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$
$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{L} = I \vec{\omega}$
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}$	$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \vec{\alpha}$

## 1.8. Problemas resolvidos

### 1.8.1. Probl. 1. 1 – Movimento rectilíneo

Considere um objecto pontual que se move segundo uma linha recta com o seguinte gráfico de velocidade (referencial S):



- a) Faça uma representação gráfica da aceleração do objecto. Indique sobre os gráficos os valores das acelerações obtidas e quantifique para os seguintes valores de  $t_i$  em segundos:

$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
0	10	40	110	120

- b) Obtenha a posição do objecto,  $x(t)$ , e represente-a graficamente ( $x = 0$  para  $t = 0$ ).  
 c) Qual o máximo afastamento que o objecto teve da origem e quando é que se deu?

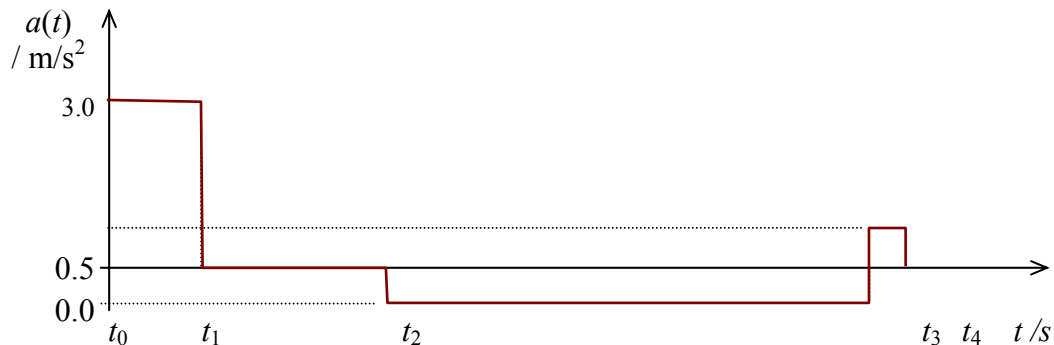
*Resolução:*

- a) Trata-se do movimento de uma partícula num espaço a 1 dimensão. Designando a coordenada de espaço por  $x$ , será:

$$\text{velocidade da partícula} \rightarrow \mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i}, \text{ ou } \mathbf{v} = v\mathbf{i}, \text{ com } v = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{e a aceleração} \rightarrow \mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i}, \text{ ou } \mathbf{a} = a\mathbf{i}, \text{ com } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

A representação gráfica da aceleração da partícula será a representação gráfica da derivada da velocidade:



- b) Como  $v = \frac{dx}{dt}$ , será  $x(t) = \int v(t)dt + C^{te}$ , ou de outro modo,  $x(t) = \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau$ , em que  $v(t_0)=0$  é um dado do problema.

Pode organizar-se a seguinte tabela:

Caso	tempo	Velocidade <sup>(*)</sup> (m/s)	Aceleração (m/s <sup>2</sup> )	Posição <sup>(**)</sup> (m)
1	$0 < t \leq t_1$	$v(t) = 3t$	$a(t) = 3$	$x(t) = 1,5t^2$
2	$t_1 < t \leq t_2$	$v(t) = 30$	$a(t) = 0$	$x(t) = -150 + 30t$
3	$t_2 < t \leq t_3$	$v(t) = 50 - 0,5t$	$a(t) = -0,5$	$x(t) = -550 + 50t - 0,25t^2$
4	$t_3 < t \leq t_4$	$v(t) = -60 + 0,5t$	$a(t) = +0,5$	$x(t) = 5500 - 60t + 0,25t^2$

(\*) Obtida a partir da figura dada, em que  $v(t) = at+b$ .

(\*\*) A posição é obtida por intervalos, para os diferentes casos:

$$1 - x(t) = \int_0^t 3\tau d\tau = 1,5 \left[ \tau^2 \right]_0^t = 1,5t^2. \text{ Para } t = 10 \text{ s será } x(10) = 150 \text{ m.}$$

$$2 - x(t) = 150 + \int_{10}^t 30d\tau = 150 + 30 \left[ \tau \right]_{10}^t = 150 + 30(t - 10) = -150 + 30t$$

Para  $t = 40$  s será  $x(40) = 1050$  m.

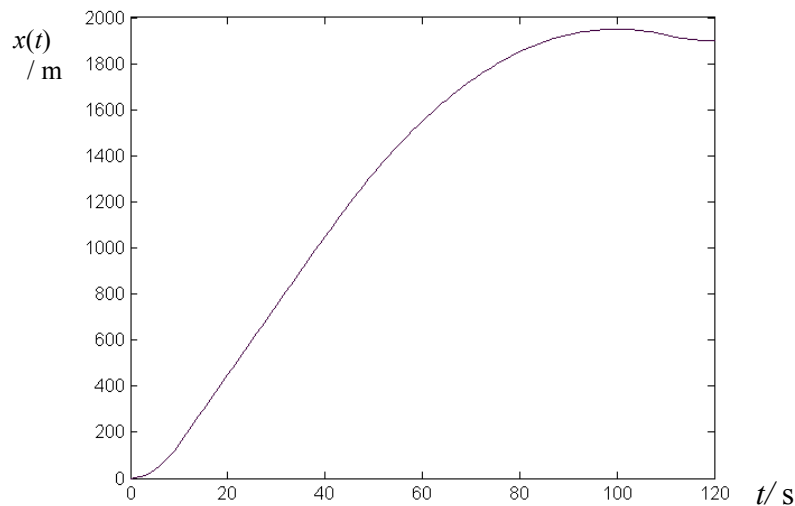
$$3 - x(t) = 1050 + \int_{40}^t (50 - 0,5\tau)d\tau = 1050 + \left[ 50\tau - 0,25\tau^2 \right]_{40}^t = -550 + 50t - 0,25t^2.$$

Para  $t = 110$  s será  $x(110) = 1925$  m.

$$4 - x(t) = 1925 + \int_{110}^t (-60 + 0,5\tau)d\tau = 1925 + \left[ -60\tau + 0,25\tau^2 \right]_{110}^t = 5500 - 60t + 0,25t^2.$$

Para  $t = 120$  s será  $x(120) = 1900$  m.

Graficamente



O máximo afastamento dá-se quando  $v = 0$ . Isto passa-se quando  $t_2 < t < t_3$ , em que  $v(t) = 50 - 0,5t$ . Igualando  $v(t)$  a zero,  $50 - 0,5t = 0$  obtém-se  $t_m = 100$  s. Substituindo este valor de  $t$  na expressão da posição vem  $x(100) = 1950$  m

**1.8.2. Probl. 1. 2 – Movimento circular**

A informação de um CD (disco compacto) é armazenada em sequências de cavas e planos sobre a sua superfície. A informação é armazenada digitalmente e as alternâncias entre as cavas e os planos são detectadas por um sistema óptico constituído por um laser e lentes, e representam os valores binários zero ou um. O comprimento de cada sequência de zeros ou uns é sempre o mesmo, independentemente de se encontrarem mais ou menos para o interior do disco e a leitura faz-se com uma velocidade linear constante, de 1.3 m/s. O disco roda no sentido inverso. A espira mais interior de todas tem um diâmetro de 46 mm e a mais exterior 116 mm. Nestas condições calcule:

- A velocidade de leitura em km/h.
- A velocidade angular do disco quando a cabeça de leitura se encontra na espira mais interior, em rad/s e em rpm.
- Idem, para a espira mais exterior.
- O comprimento lido pela cabeça de leitura num CD de 74 minutos.
- A distância média entre espiras consecutivas e o seu número.
- O número de rotações que dá o disco durante os 74 minutos.

*Resolução:*

- Não há mais do que converter a informação que é dada em m/s em km/h:  
 $v = 1,3 \text{ m/s} = 1,3 \times 10^{-3} \times 3600 \text{ km/h} = 4,68 \text{ km/h}$ .
- $v = \omega r \rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{1,3}{23 \times 10^{-3}} = 56,52 \text{ rad/s}$      $\omega = \frac{56,52}{2\pi} \times 60 \text{ rpm} = 539,74 \text{ rpm}$
- Para a espira mais exterior  $r = 58 \text{ mm} \rightarrow \omega = \frac{1,3}{58 \times 10^{-3}} = 22,41 \text{ rad/s} = 214,00 \text{ rpm}$
- Como a velocidade linear é constante pode fazer-se simplesmente  
 $\ell = vt \rightarrow \ell = 1,3 \times 74 \times 60 \text{ m} = 5772 \text{ m} = 5,772 \text{ km}$
- Na realidade a gravação realiza-se segundo uma espiral de Arquimedes,  $r = a\theta + b$   
 Para  $\theta = 0$  é  $r = r_1$ , e para  $\theta = 2\pi n$  é  $r = r_2$ , logo,  $b = r_1$  e  $a = \frac{r_2 - r_1}{2\pi n} \rightarrow$

$$r = \frac{r_2 - r_1}{2\pi n} \theta + r_1$$

O arco percorrido no intervalo de tempo infinitesimal é dado por  $ds = r d\theta$ , e

$$\int_0^{2\pi n} ds = \ell, \text{ pelo que } \int_0^{2\pi n} ds = \ell \rightarrow \int_0^{2\pi n} r d\theta = \ell \rightarrow \int_0^{2\pi n} \left( \frac{r_2 - r_1}{2\pi n} \theta + r_1 \right) d\theta = \ell \rightarrow$$

$$\left[ \frac{r_2 - r_1}{2\pi n} \frac{\theta^2}{2} + r_1 \theta \right]_0^{2\pi n} = \ell, \text{ donde se obtém } n = 22683 \text{ espiras. O valor de } d \text{ obtém-se}$$

$$\text{por: } d = \frac{r_2 - r_1}{n} = 1,54 \mu\text{m.}$$

Considere-se outra abordagem, em que o arco de espiral descrito em cada rotação é aproximado por uma circunferência. Faça-se a seguinte tabela:

Nº da rotação	Raio da espira	Perímetro da espira
1	$r_1$	$2\pi r_1$
2	$r_1+d$	$2\pi (r_1+d)$
3	$r_1+2d$	$2\pi (r_1+2d)$
...	...	...
$n$ (última)	$r_1+(n-1)d$	$2\pi (r_1+(n-1)d)$

A soma de todos os perímetros será igual ao comprimento total  $\ell = 5772$  m:

$$2\pi r_1 + 2\pi (r_1+d) + 2\pi (r_1+2d) + \dots + 2\pi (r_1+(n-1)d) = \ell$$

$$n \times 2\pi r_1 + 2\pi d(1+2+3+\dots+n-1) = \ell \rightarrow n \times 2\pi r_1 + 2\pi d \times n \times \frac{n-1}{2} = \ell.$$

O perímetro da última espira é conhecido:  $2\pi(r_1+(n-1)d) = 2\pi r_2 = 2\pi \times 0,058$ .

Fica-se assim com o sistema de equações

$$\begin{cases} 2\pi(r_1+(n-1)d) = 2\pi r_2 = 2\pi \times 0,058 \\ n \times 2\pi r_1 + 2\pi d \times n \times \frac{n-1}{2} = \ell \end{cases}$$

Substituindo valores numéricos

$$\begin{cases} 2\pi \times (0,023 + (n-1)d) = 2\pi \times 0,058 \\ n \times 2\pi \times 0,023 + 2\pi d \times n \times \frac{n-1}{2} = 5772 \end{cases}$$

que resolvido conduz a

$$\begin{cases} n = 22683 \text{ espiras} \\ d = 1,543 \mu\text{m} \end{cases}$$

f) O número de rotações efectuado é igual ao número de espiras obtido acima:

$$n = 22683 \text{ rot.}$$

**1.8.3. Probl. 1. 3 – Movimentos relativos**

Considere os referenciais  $S_0$  e  $S$  representados na pág. 7. Seja  $P$  um ponto coincidente de  $S$ , ou seja, um ponto rigidamente ligado a  $S$ . Prove que entre a velocidade de  $P$  expressa em  $S_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ , e o vector rotação instantânea de  $S$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ , existe a relação

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}_0$$

*Resolução:*

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r$$

Como  $\mathbf{v}_r = 0$  por  $P$  ser um ponto fixo em  $S$ , fica apenas  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , ou ainda

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{p}} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad \text{Será pois } \begin{cases} v_x = \dot{p}_x + (\omega_y z - \omega_z y) \\ v_y = \dot{p}_y + (\omega_z x - \omega_x z) \\ v_z = \dot{p}_z + (\omega_x y - \omega_y x) \end{cases}$$

$$\text{Calcule-se rot } \mathbf{v}_0: \rightarrow \text{rot } \mathbf{v}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

As derivadas parciais podem ser calculadas pois  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  são conhecidas, ficando assim

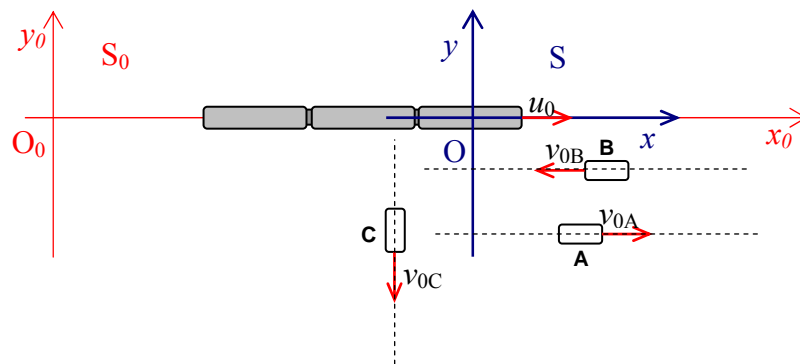
$$\text{rot } \mathbf{v}_0 = (\omega_x + \omega_x) \mathbf{i} + (\omega_y + \omega_y) \mathbf{j} + (\omega_z + \omega_z) \mathbf{k}, \text{ ou finalmente } \text{rot } \mathbf{v}_0 = 2\boldsymbol{\omega}.$$

### 1.8.4. Probl. 1. 4 – Movimentos relativos

Um comboio desloca-se numa linha de caminho de ferro rectilínea, com uma velocidade uniforme de 140 km/h. Paralela à linha há uma estrada, onde um automóvel **A** se desloca no mesmo sentido que o comboio, a 130 km/h, e um automóvel **B** se desloca em sentido contrário, a 85 km/h. A linha cruza, na perpendicular uma 2ª estrada (por um viaduto), onde um automóvel **C** se desloca a 90 km/h, para a direita. Nestas condições determine, no referencial do comboio, as velocidades dos automóveis **A**, **B** e **C**.

Para a resolução deste problema deverá escrever a lei de composição de velocidades (movimentos relativos), identificar todas as suas componentes e indicar quais as que se anulam.

Resolução:



$S_0$  – referencial em terra

$S$  – referencial no comboio

$u_0$  – velocidade do comboio em  $S_0$

$v_{0A}$ ,  $v_{0B}$ ,  $v_{0C}$  – velocidades dos automóveis A, B e C em  $S_0$ .

Lei da composição de velocidades:  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r$

Como  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , porque não há rotação de  $S$  em relação a  $S_0$  e  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{u}_0$ , fica apenas

$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{v}_r \rightarrow \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_0$  em que  $\mathbf{v}_r$  é a velocidade no referencial  $S$ .

Particularizando para os valores do problema:

$\mathbf{u}_0 = 140\mathbf{i}_0$  (km/h)    $\mathbf{v}_{0A} = 130\mathbf{i}_0$  (km/h)    $\mathbf{v}_{0B} = -85\mathbf{i}_0$  (km/h)    $\mathbf{v}_{0C} = -90\mathbf{j}_0$  (km/h)

Donde

$\mathbf{v}_{rA} = 130\mathbf{i}_0 - 140\mathbf{i}_0$  (km/h) =  $-10\mathbf{i}_0$  (km/h)   (visto do comboio o automóvel A anda para trás, muito devagar)

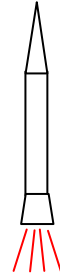
$\mathbf{v}_{rB} = -85\mathbf{i}_0 - 140\mathbf{i}_0$  (km/h) =  $-225\mathbf{i}_0$  (km/h)   (visto do comboio o automóvel B anda para trás, a grande velocidade)

$\mathbf{v}_{rC} = -90\mathbf{j}_0 - 140\mathbf{i}_0$  (km/h) =  $-140\mathbf{i}_0 - 90\mathbf{j}_0$  (km/h)   (visto do comboio o automóvel B anda para trás, e para a direita, em diagonal)

## 1.8.5. Probl. 1. 5 – Movimento de um projectil

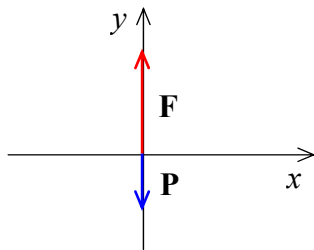
Um foguete meteorológico de 6 kg é lançado na vertical, como indicado na figura. A força de propulsão é constante e igual a 200 N, até se esgotar o combustível, o que acontece ao fim de 5 segundos. Calcule:

- A que altitude é que se esgota o combustível, supondo que a massa total do foguete se mantém constante (despreze a resistência do ar).
- Qual a altura máxima que o foguete atinge.
- Se a massa do foguete fosse de 2 kg, ao esgotar-se o combustível que velocidade teria o foguete?



Resolução:

a)



As forças que actuam sobre o foguete são o próprio peso e a força

de propulsão  $F$ . Pela 2ª lei de Newton, a aceleração que o corpo adquire é proporcional à resultante das forças que sobre ele actuam:  $ma = P + F$ . Estas forças têm apenas componente segundo uma direcção, pelo que

$$a = \frac{F - P}{m} = \frac{200 - 6 \times 9,80}{6} \text{ ms}^{-2} = 23,53 \text{ ms}^{-2}.$$

Pela lei do movimento  $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ .

Considerando a cota do ponto de lançamento como zero, e uma vez que o foguete parte do repouso, fica  $y = 1/2 at^2$ . Esgotando-se o combustível ao fim de 5 segundos obtém-se a altura máxima  $y_1 = 294,1$  m.

- b) A partir da cota  $y_1$  a força que actua sobre o foguete é apenas resultante do seu peso. A altura máxima,  $y_m$ , é atingida quando  $v = 0$ . A lei de a velocidade diz que  $v = v_1 - gt$ . O valor de  $v_1$  pode ser determinado com os valores de a):  $v_1 = a \times 5 \text{ s} = 23,53 \times 5 = 117,65 \text{ m/s}$ .  $\rightarrow t = 12,00 \text{ s}$ .

Cálculo de  $y_m$ :

$$y = y_1 + v_1 t - \frac{1}{2} gt^2. \text{ Logo } y_m = 294,1 + 117,65 \times 12,00 - \frac{1}{2} 9,80 \times 12,00^2 \text{ m} = 1000,3 \text{ m}.$$

- c) Admita-se que o combustível é consumido de forma proporcional ao tempo. A massa do foguete seguirá a equação  $m = m_0 - \alpha t$ . Para  $t = 0$   $m = 6$  kg, para  $t = 5$  s  $m = 2$  kg  $\rightarrow m_0 = 6$  e  $\alpha = 0,8 \text{ ms}^{-2}$ . A cada instante, durante a primeira fase, a aceleração não será constante mas vai aumentando:

$$a = \frac{200 - 6 \times 9,80}{6 - 0,8t} \text{ ms}^{-2}. \text{ Ao esgotar-se o combustível a velocidade do foguete será}$$

$$v_1 = \int_0^5 a(\tau) d\tau = \int_0^5 \frac{141,2}{6 - 0,8\tau} d\tau = \frac{141,2}{-0,8} [\ln(6 - 0,8\tau)]_0^5 = 160,659 \text{ m/s} (> 117,65).$$

### 1.8.6. Probl. 1. 6 - Queda de um grave

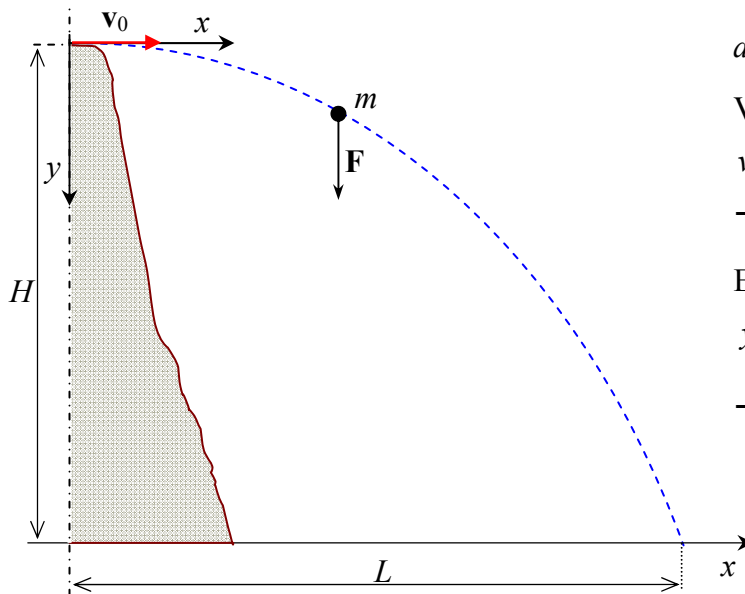
Um rapaz encontra-se junto ao mar, no topo de uma falésia, a atirar pedras para a água e a medir o tempo que as mesmas demoram a cair (**perigo: não é permitido atirar pedras do alto das falésias!**).

- Num primeiro lançamento uma pedra foi atirada horizontalmente e demorou  $t_1$  segundos a atingir a água. Qual a altura da falésia (despreze a resistência do ar). Particularize para  $t_1=3,80$  s.
- Num segundo lançamento a pedra foi atirada com uma inclinação de  $45^\circ$  para cima e demorou  $t_2$  segundos a atingir a água. De quanto é que a pedra se elevou acima da falésia e a que distância da vertical do rapaz é que caiu? Particularize para  $t_2 = 4,90$  s.
- Determine os valores da energia cinética, potencial e total da pedra, suposta de 0,25 kg:
  - 1) Imediatamente após o lançamento. 2) No ponto de altura máxima. 3) Ao atingir o mar.

*Resolução:*

Em primeiro lugar estabelece-se um referencial, com o respectivo sistema de eixos. Escolheu-se o sistema de eixos (xOy), ortogonal (que não é um sistema directo).

- A pedra, de massa  $m$ , sujeita à força  $\mathbf{F}$ , adquire uma aceleração  $\mathbf{a}$  tal que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . No caso da queda do grave o valor de  $\mathbf{a}$  é igual a  $\mathbf{g}$ , aceleração da gravidade. Decompõe-se o problema bidimensional em dois problemas independentes a uma dimensão:



Movimento segundo y:

$$a_y = g \text{ e } a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

Velocidade:

$$v_y = \int_0^t a_y d\tau = \int_0^t g d\tau$$

$$\rightarrow v_y = gt$$

Espaço percorrido:

$$y = \int_0^t v_y dt = \int_0^t g\tau d\tau$$

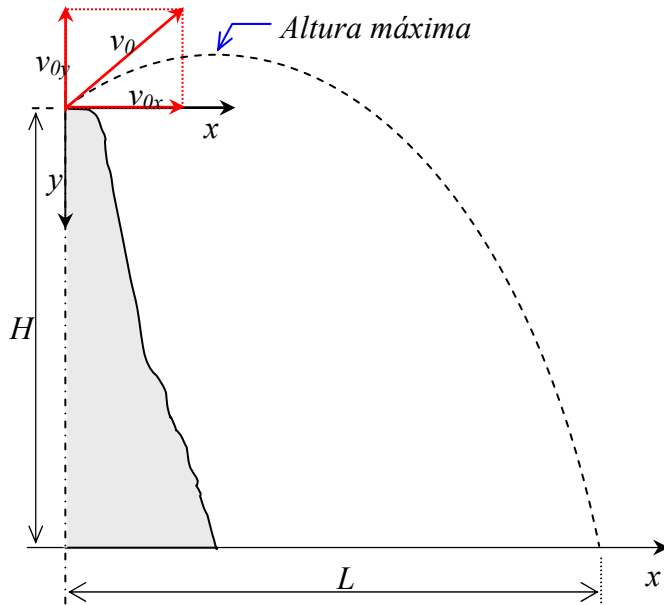
$$\rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{Altura da falésia: } H = \frac{1}{2} \times 9,80 \times 3,80^2 \text{ m} = 70,76 \text{ m}$$

Movimento segundo x:

$$x = \int_0^t v_0 dt = v_0 t. \text{ Não se pode adiantar mais porque não se conhece } v_0.$$

b) A pedra primeiro sobe, passa por uma altura máxima e depois cai ao mar, como se mostra na figura seguinte:



Movimento na vertical:

Aceleração:  $g$

Velocidade:

$$v(t) = -v_{0y} + \int_0^t g d\tau = -v_{0y} + gt$$

Posição:

$$y(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t (-v_{0y} + g\tau) d\tau$$

$$y(t) = -v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

Mas sabe-se que para  $t = t_2$  é

$$y(t) = H, \text{ logo } H = -v_{0y}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$$

e portanto

$$v_{0y} = \frac{0,5 \times g \times t_2^2 - H}{t_2}$$

Substituindo valores:  $v_{0y} = \frac{0,5 \times 9,8 \times 4,90^2 - 70,76}{4,90} = 9,569 \text{ m/s}$ .

A altura máxima ocorre quando a componente vertical de  $v(t)$  se anula  $\rightarrow -v_{0y} + gt = 0 \rightarrow t_m = 0,976 \text{ s}$ . Substituindo este valor de  $t$  na expressão de  $y(t)$  obtém-se  $H_m = -4,66 \text{ m}$ . Repare-se no significado do sinal menos.

Como a velocidade inicial, de lançamento, é a  $45^\circ$ , as suas componentes em  $x$  e  $y$  são iguais, ou seja,  $v_{0x} = v_{0y} = 9,569 \text{ m/s}$ . O espaço percorrido na horizontal é

$$x(t) = \int_0^t v_{0x} d\tau = v_{0x}t. \text{ Para } t=t_2 \text{ é } x(t) = L, \text{ donde } L = v_{0x}t_2 = 9,569 \times 4,9 \text{ m} = 46,89 \text{ m}.$$

c) Vão ser utilizadas as expressões  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $E_p = mgh$  e  $E_t = E_c + E_p$ . Para obter  $v$  para o caso 3 é preciso  $v_y$ :  $v_y(t) = -v_{0y} + gt = -9,569 + 9,80 \times 4,90 \text{ m/s} = 38,45 \text{ m/s}$ .

Caso $\rightarrow$	1. Após o lançamento	2. Na altura máxima	3. Ao cair no mar
$v$	$\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 13,53 \text{ m/s}$	$v_{0x} = 9,569 \text{ m/s}$	$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 39,62 \text{ m/s}$
$E_c$	22,89 J	11,45 J	196,32 J
$h$	70,76 m	75,42 m	0 m
$E_p$	173,36 J	184,78 J	0 J
$E_t$	196,25 J	196,23 J	196,22 J

Observa-se o facto já conhecido da conservação da energia mecânica total.

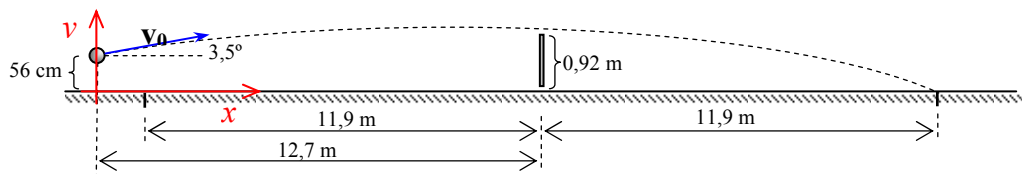
**1.8.7. Probl. 1. 7 – Movimento de um projectil**

1. Um jogador de ténis encontra-se a 12,7 m da rede quando faz o lançamento da bola. Sabendo que esta é lançada de um ponto a 56 cm do solo, segundo um ângulo de 3,5° acima da horizontal, pergunta-se

a) Qual a velocidade de lançamento da bola, se, atirando o mais longe possível, não quiser ultrapassar a marcação do campo adversário. Será que a bola passa sobre a rede?

b) Qual a energia cinética da bola na posição de altura máxima?

Considere a bola esférica com 4 cm de raio e 70 g de massa.



*Resolução:*

Escolha do referencial: eixos coordenados indicados na figura.

a) Equações do movimento:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Com  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . Logo,

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos \alpha t \\ y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Eliminando  $t$  nas equações anteriores obtém-se a equação da trajectória:

$$y - y_0 = \tan \alpha (x - x_0) - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Sabe-se que  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0,56$  m e  $\alpha = 3,5^\circ$ .

Vai determinar-se  $v_0$  obrigando a que  $y = 0$  quando  $x = 12,7 + 11,9$  m = 24,6 m.

Resolvendo a última equação em ordem a  $v_0$  obtém-se  $v_0 = 37,959$  m/s.

Será que a bola passa sobre a rede?

A condição exigida é que para  $x = 12,7$  m deverá ser  $y > 0,92 + 0,04$  m = 0,96 m.

Usando a equação da trajectória obtém-se

$$y = 0,56 + \tan 3,5^\circ \times 12,7 - \frac{9,80 \times 12,7^2}{2 \times 37,959^2 \times \cos^2 3,5^\circ} = 0,79 \text{ m, que é inferior a } 0,96 \text{ m.}$$

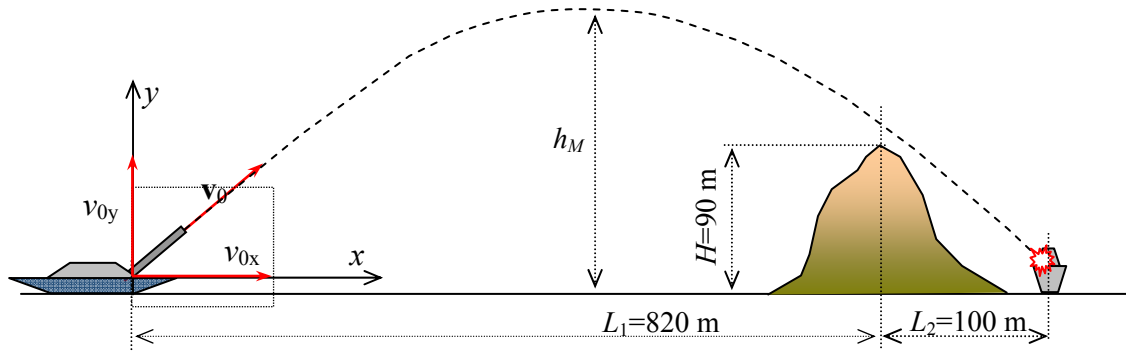
Logo, com as condições dadas a bola não pode passar por cima da rede.

b) Na altura máxima a velocidade apenas tem componente segundo  $x$ :  $v = v_0 \cos \alpha = 37,888$  m/s.

A energia cinética da bola é dada por  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow E_c = \frac{1}{2}0,70 \times 37,888^2 \text{ J} = 50,24 \text{ J}$

## 1.8.8. Probl. 1. 8 - Movimento de um projectil

Um projectil é lançado do canhão de um navio de modo a alcançar um outro navio que se encontra escondido atrás de uma ilha com 90 m de altura.



O canhão encontra-se a 25 m acima do nível do mar, a 820 m da vertical do topo da ilha, e o alvo é um navio semelhante, que está a 100 m para o lado oposto. Sabendo que a velocidade de disparo é de 190 m/s, calcule, desprezando a resistência do ar:

- O melhor ângulo de fogo, em relação à horizontal, necessário para atingir o navio.
- O tempo que o mesmo levou, até atingir o alvo.
- A altura,  $h_M$ , que o projectil atingiu.
- A distância, na vertical, a que o projectil passou do cimo da ilha.

*Resolução:*

Primeiramente escolhe-se um referencial, com o respectivo sistema de eixos. Escolheu-se o sistema de eixos ( $xOy$ ), ortogonal, com origem no local do disparo.

- O projectil, de massa  $m$ , sujeito à força  $\mathbf{F}$ , adquire uma aceleração  $\mathbf{a}$  tal que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . No caso do projectil o valor de  $\mathbf{a}$  é igual a  $-\mathbf{g}$ , aceleração da gravidade e só existe na direcção vertical. Repare-se no sinal menos, devido à posição relativa do eixo dos  $yy$  e da aceleração  $g$ .  
Decompõe-se o problema bidimensional em dois problemas independentes a uma dimensão.

Movimento segundo  $y$ :

$$\text{Aceleração: } a_y = -g \rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} \rightarrow \text{Velocidade: } v_y = \int a_y dt + C = -\int g dt + C \rightarrow$$

$$v_y = -gt + C$$

O valor da constante obtém-se a partir do conhecimento da condição inicial: para  $t = 0$  é  $v_y = v_{0y} \rightarrow C = v_{0y}$ . Logo, será  $v_y = v_{0y} - gt$

$$\text{Espaço percorrido na vertical: } y = \int v_y dt + C = \int (v_{0y} - gt) dt + C \rightarrow$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + C$$

De novo o valor da constante é obtido sabendo que para  $t = 0$  é  $y = 0$ ,  $\rightarrow C = 0$ , resultando assim  $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ .

Movimento segundo  $x$ :

Aceleração:  $a_x = 0 \rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow$  Velocidade:  $v_x = \int a_x dt + C \rightarrow v_x = C = v_{0x}$

Espaço percorrido na horizontal:  $x = \int v_x dt + C = \int v_{0x} dt + C \rightarrow x = v_{0x}t + C \rightarrow x = v_{0x}t$ .

As componentes da velocidade inicial podem escrever-se  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  e  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$  em que  $v_0$  é conhecido (depende do tipo de projectil e da sua carga).

Tem-se pois

$$\begin{cases} x = v_0(\cos \alpha)t \\ y = v_0(\sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Sabe-se que para  $x = L_1 + L_2$  (920 m) deverá ser  $y = 0$  m (o alvo, sendo um navio igual, encontra-se 25 m acima do nível do mar). Substituindo estes valores no sistema de equações anterior e eliminando  $t$  vem  $v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}g(L_1 + L_2) \rightarrow$

$$\sin(2\alpha) = \frac{g(L_1 + L_2)}{v_0^2}, \quad \sin(2\alpha) = \frac{9,8 \times 920}{190^2} \rightarrow \alpha = 7,231^\circ \text{ ou } \alpha = 82,769^\circ.$$

Vai verificar-se se o ângulo mais pequeno satisfaz. Qualquer dos ângulos deverá ser maior do que o resultante de uma linha recta dirigida ao topo da ilha, se estivesse a meia distância. Este critério daria  $\alpha_{\min} = \arctg\left(\frac{H - 25}{0,5L_1}\right) \rightarrow \alpha_{\min} = 8,79^\circ$ .

Portanto o menor ângulo não satisfaz.

b) O tempo que o projectil demora a atingir o alvo obtém-se a partir da equação do movimento vertical fazendo  $y = 0$ ,  $\rightarrow v_0(\sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t = 0$  (solução trivial)

ou  $t = 38,467$  s.

c) A altura máxima obtém-se quando  $v_y = 0$ , ou seja  $v_0 \sin \alpha - gt = 0 \rightarrow t = 19,234$  s.

Substituindo este valor de  $t$  na equação de  $y(t)$  e somando 25 m resulta  $h_M = 1837,7$  m.

d) Calcula-se primeiro o tempo que o projectil demora a chegar à vertical da ilha (a partir da equação do movimento em  $x$ ):  $t_1 = \frac{L_1}{v_0 \cos \alpha} \rightarrow t_1 = \frac{820}{190 \times \cos(82,769)} \text{ s} \rightarrow$

$$t_1 = 34,288 \text{ s.}$$

Substitui-se este tempo na equação do movimento em  $y$ , resultando  $h_1 = 702,14$  m.

Como em relação ao sistema de eixos a ilha tem só 65 m, conclui-se que o projectil passa, na vertical, a 637 m do topo da ilha.

**1.8.9. Probl. 1. 9 – Energia cinética e potencial**

Em relação ao problema anterior, calcular a energia cinética e a energia potencial do projectil, sabendo que este tem a massa de 1.2 kg:

- À saída do canhão.
- Na posição correspondente à altura máxima da trajectória.
- Na vertical da ilha.
- Ao atingir o mar (entretanto alvo tinha-se deslocado).

*Resolução:*

a) No problema anterior torna-se necessário saber  $v_0$ . A partir da alínea c) pode escrever-se  $v_0 = gt / \sin \alpha = 9,80 \times 19,234 / \sin 82,769 = 190,0$  m/s. A energia cinética é

calculada por  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , ou seja,  $E_c = \frac{1}{2} \times 1,2 \times 190^2 \text{ J} = 21.660 \text{ J} = 21,66 \text{ kJ}$ .

A energia potencial é dada por  $E_p = mgh$ . Substituindo valores:  $E_p = 1,2 \times 9,80 \times 25 \text{ m} = 294 \text{ J}$ .

b) Na posição correspondente à altura máxima da trajectória é  $v = v_0 \cos \alpha$  ( $v_y = 0$ ) e portanto  $v = 190,0 \times \cos 82,769 \text{ m/s} = 23,915 \text{ m/s}$ . A energia cinética correspondente

será  $E_c = \frac{1}{2} \times 1,2 \times 23,915^2 \text{ J} = 343 \text{ J}$ .

A energia potencial tem o valor  $E_p = 1,2 \times 9,80 \times 1837,7 \text{ J} = 21611 \text{ J}$ .

c) É preciso calcular a velocidade na vertical da ilha:  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ . A componente  $v_x$  é igual à da alínea anterior, pois mantém-se constante durante o movimento. Para  $v_y$  será  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ , em que  $t$  é obtido por  $L_1 = v_0 \cos \alpha t$ . Logo

$$v_y = 190,0 \times \sin 82,769 - g \times \frac{820}{190 \times \cos 82,769} \rightarrow v_y = -147,53 \text{ m/s. Tem-se pois}$$

$v^2 = 23,915^2 + 147,53^2 = 22337 \text{ m}^2/\text{s}^2$  ( $v = 149,45 \text{ m/s}$ ). A energia cinética é de 13.402 J.

A energia potencial pode obter-se a partir da conservação da energia mecânica. Note-se que nas alíneas a) e b) se tem  $E_c + E_p = 21954 \text{ J}$ . Portanto, aqui será  $E_p = 21954 - 13402 = 8552 \text{ J}$ .

d) Para a resolução desta alínea, vamos usar também a conservação da energia mecânica. Ao atingir o mar é  $E_p = 0 \text{ J}$ , pelo que fica  $E_c = E_t - E_p = 21954 - 0 = 21954 \text{ J}$

### 1.8.10. Probl. 1. 10 – Movimento circular uniforme

Um satélite move-se em torno da Terra, executando uma órbita circular. Determine a relação entre a sua velocidade linear e a altitude a que se encontra. Determine a que distância é que a sua órbita é geostacionária.

*Resolução:*

O satélite encontra-se em equilíbrio na órbita quando a força de atracção da Terra equilibra a força centrífuga.

Força de atracção:  $F_g = G \frac{Mm}{r^2} = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$ .  $m$  representa a massa do satélite e  $h$  a sua altitude.

Força centrífuga:  $F_c = m \frac{v^2}{r} = m \frac{v^2}{R+h}$ .

Igualando as duas expressões (notar que estas forças têm sentidos opostos. A resultante anula-se quando os módulos são iguais):

$$F_g = F_c \Rightarrow G \frac{Mm}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

A órbita será geo-estacionária se  $v = \omega(R+h) = \frac{2\pi}{T}(R+h) = \frac{2\pi}{86164}(R+h)$

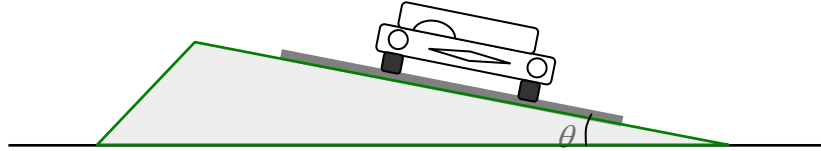
Combinando com a equação anterior obtém-se

$$\left[ \frac{2\pi}{86164}(R+h) \right]^2 = \frac{GM}{R+h} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{GM \times 86164^2}{4\pi^2}} - R$$

donde  $h = \sqrt[3]{\frac{6,673 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24} \times 86164^2}{4\pi^2}} - 6,37 \times 10^6$ , ou seja  $h = 35\,660$  km

1.8.11. Probl. 1. 11 – Movimento circular uniforme

A curva de uma estrada foi projectada com “relevé”, como indicado na figura.



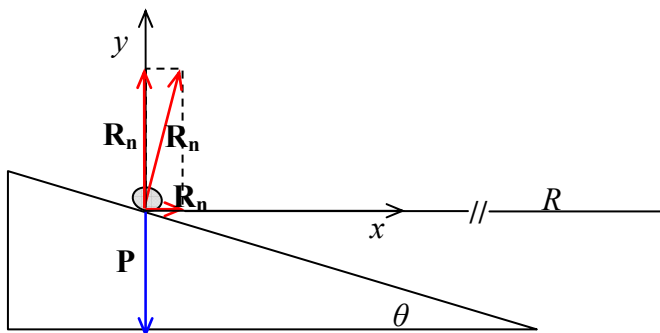
- Obtenha a expressão que relaciona o ângulo do “relevé” com o raio de curvatura da estrada e com a velocidade do automóvel, de modo a que este não seja solicitado para dentro ou para fora da estrada.
- Faça uma aplicação numérica para  $v = 90 \text{ km/h}$  e  $R = 80 \text{ m}$ .

Resolução:

- Considere-se o automóvel como uma partícula material de massa  $m$ , à distância  $R$  do centro da circunferência que define o “relevé”. Desprezam-se as forças de atrito.

As forças que actuam sobre o automóvel, para efeitos do problema são

- O peso,
- A reacção normal à superfície.



A resultante das forças que, em cada instante, actuam sobre as partículas é

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{P} + \mathbf{R}_n$$

Como a trajectória é descrita num plano horizontal vai utilizar-se o referencial com eixos  $(x,y)$  tal como indicado na figura.

Por outro lado a aceleração que o corpo adquire é radial e dada por

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Pela 2ª lei de Newton será então, para as componentes segundo  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} R_n \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \\ R_n \cos \theta = mg \end{cases}$$

Dividindo a 1ª equação pela 2ª vem

$$\theta = \arctan \frac{v^2}{gR}$$

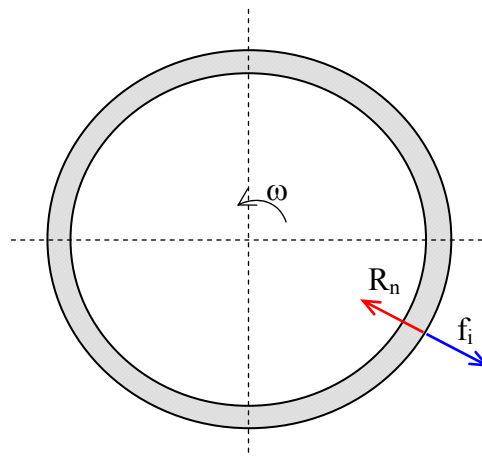
$$b) \theta = \arctan \frac{(90 \times 1000 / 3600)^2}{9,8 \times 80} = 38,56^\circ$$

### 1.8.12. Probl. 1. 12 – Movimento circular uniforme

Uma estação espacial é constituída por uma roda com 130 m de diâmetro.

- Qual deverá ser a sua velocidade de rotação para se obter uma gravidade artificial de 0.33 g?
- Qual a velocidade linear de um tripulante que se encontre na estação (no referencial desta)?

Resolução:



- A força de inércia, resultante do movimento de rotação da nave é dada em módulo por

$$f_i = m\omega^2 R$$

Quer-se que esta força de inércia provoque uma reacção normal sobre o “chão” da nave igual a

$$R_n = 0,33mg$$

Igualando as duas equações obtém-se

$$\omega = \sqrt{0,33 \times \frac{g}{R}}$$

Valores numéricos:  $\omega = \pm \sqrt{0,33 \times \frac{9,8}{65}} = \pm 0,223 \text{ rad/seg} = 2,13 \text{ rpm}$

- $v = \omega R \rightarrow v = 0,223 \times 65 \text{ m/s} = 14,50 \text{ m/s} = 52 \text{ km/h}$

**1.8.13. Probl. 1. 13 – Movimentos relativos**

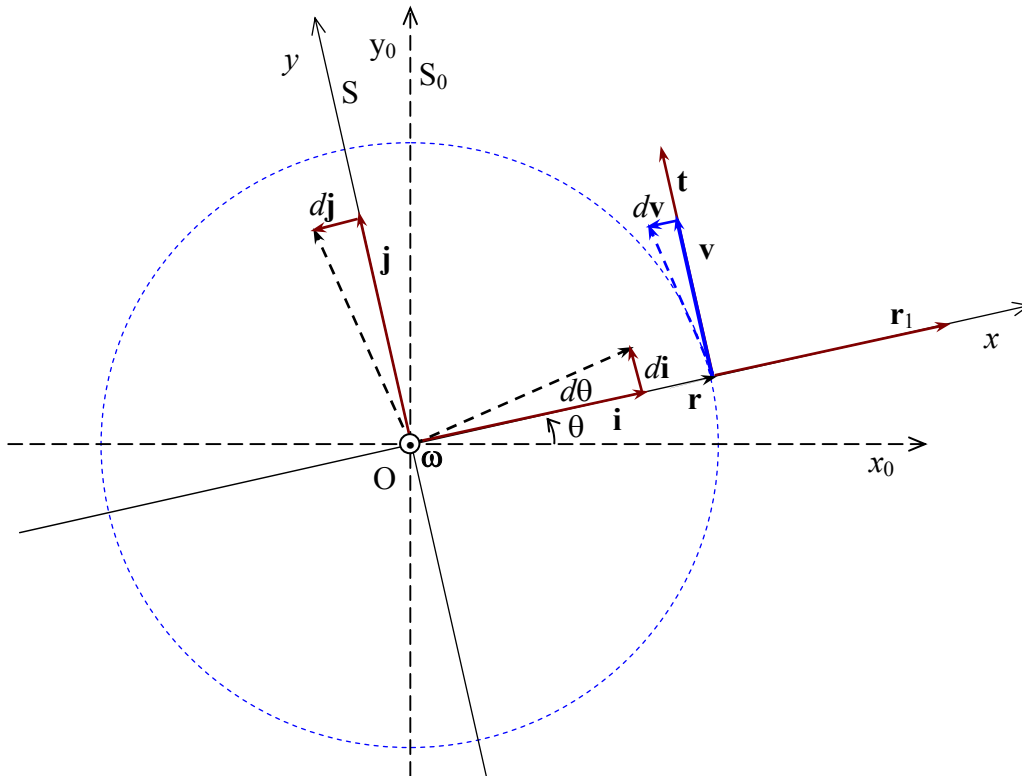
Um motor eléctrico, de induzido bobinado, com o eixo vertical, roda à velocidade nominal uniforme de 3000 rpm. As espiras mais exteriores do induzido estão à distância de 8 cm do eixo, têm o comprimento de 18 cm e são de fio de cobre de  $2,5 \text{ mm}^2$  de secção. Nestas condições,

- Identifique, a partir das variações no tempo dos versores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  de  $S$ , a direcção do vector  $\boldsymbol{\omega}$ . Relacione  $\boldsymbol{\omega}$  com a variação da posição angular  $\theta$  do rotor, em  $S_0$ .
- Determine a velocidade linear do ponto médio da espira indicada (módulo e sentido).
- Determine a aceleração linear do mesmo ponto (módulo e sentido).
- Calcule a força de inércia associada a meia espira ( $\ell = 18 \text{ cm}$ , à distância  $r = 8 \text{ cm}$  do eixo). Qual o seu módulo e sentido? O que é que faz com que a espira não se afaste ou aproxime do rotor?
- A força de inércia acima calculada tem o mesmo valor nos referenciais  $S_0$  e  $S$ ? Justifique.

(Obs. na resolução deste problema, e como aplicação, deverão utilizar-se os teoremas de composição de velocidades e de acelerações dos movimentos relativos, considerando o referencial  $S_0$  o do estator e o referencial  $S$  o do rotor, com  $z_0 \equiv z$ . Deverá ser feita a resolução algébrica e só a seguir efectuar a aplicação numérica).

*Resolução:*

A figura representa uma secção recta do motor. A circunferência a traço interrompido representa o percurso da espira mais exterior.



Da figura conclui-se que no referencial  $S_0$  (em  $S$  os versores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , não variam) é

$$\begin{cases} d\mathbf{i} = +d\theta \mathbf{j} \\ d\mathbf{j} = -d\theta \mathbf{i} \\ d\mathbf{k} = 0 \end{cases}$$

Pelo que será  $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = +\frac{d\theta}{dt} \mathbf{j}$        $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{i}$        $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$

Da teoria  $\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega_z \mathbf{j} - \omega_y \mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega_x \mathbf{k} - \omega_z \mathbf{i} \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega_y \mathbf{i} - \omega_x \mathbf{j} \end{cases}$       pelo que, comparando,

$$\begin{cases} \omega_z = \frac{d\theta}{dt} & \text{e} & \omega_y = 0 \\ \omega_x = 0 & \text{e} & \omega_z = \frac{d\theta}{dt} \\ \omega_y = 0 & \text{e} & \omega_x = 0 \end{cases}$$

Logo, como  $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ , fica apenas  $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k} = |\omega| \mathbf{k} = \omega \mathbf{k}$ .

Como  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  vem

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k}$$

Aplicação numérica:  $\omega = 3000 \text{ rpm} = \frac{3000 \times 2 \times \pi}{60} \text{ rad/s} = 314 \text{ rad/s}$

b) Teorema da composição das velocidades:

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r$$

$\mathbf{v}_r = 0$  porque a espira se encontra fixa no referencial  $S$  do rotor,

$\dot{\mathbf{p}} = 0$  porque as origens dos referenciais,  $O_0$  e  $O$ , são coincidentes a todo o momento.

Fica apenas

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Mas como  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{r}$  são perpendiculares, pode escrever-se

$$\mathbf{v}_0 = \omega \times r \mathbf{t}$$

em que  $\mathbf{t}$  representa o vector unitário tangente à trajectória, no sentido do movimento (ver figura anterior)

Em módulo é apenas  $v_0 = \omega r$ . Estas relações já tinham sido obtidas, ao estudar-se o movimento circular.

Aplicação numérica:  $v_0 = \omega r = 314 \times 0,08 \text{ m/s} = 25,12 \text{ m/s}$

c) Teorema da composição das acelerações:  $\mathbf{a}_0 = \underbrace{\ddot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{\mathbf{a}_t} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r}_{\mathbf{a}_c} + \underbrace{\dot{\mathbf{v}}_r}_{\mathbf{a}_r}$

$\mathbf{a}_r = 0$  porque  $\dot{\mathbf{v}}_r = 0$  ( $\mathbf{v}_r$  é constantemente nula),

$\mathbf{a}_c = 0$  porque  $\mathbf{v}_r = 0$ ,

$\ddot{\mathbf{p}} = 0$  porque as origens dos referenciais,  $O_0$  e  $O$ , são coincidentes a todo o momento.

Subsiste  $\mathbf{a}_0 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ . Mas  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_0$ , pelo que fica  $\mathbf{a}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0$ .

Como  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}_0$  conclui-se, pela regra do produto externo, que  $\mathbf{a}_0$  é dirigido segundo  $\mathbf{r}$ , para o centro:

$$\mathbf{a}_0 = -\omega^2 r \mathbf{r}_1$$

ou em módulo  $a_0 = \omega^2 r$ .

Aplicação numérica:  $a_0 = \omega^2 r = (314)^2 \times 0,08 \text{ m/s}^2 = 7887,68 \text{ m/s}^2$

d) Força de inércia associada a meia espira:  $\mathbf{f}_0 = -m\mathbf{a}_0 = \omega^2 r \mathbf{r}_1$ , em que  $m$  é a massa da meia espira,

$m = \rho \ell S$  ( $\rho$  é a massa volúmica da espira,  $\ell$  o comprimento e  $S$  a secção)

Aplicação numérica:  $f_0 = m\omega^2 r = 8900 \times 2,5 \times 10^{-6} \times 0,18 \times 7887,68 \text{ N} = 31,59 \text{ N}$

e) A força de inércia não é igual nos dois referenciais porque estes não se encontram em movimento de translação uniforme um em relação ao outro.

**1.8.14. Probl. 1. 14 – Mov. circ. unif. – Satélites GPS**

Para a determinação da posição através do sistema GPS utilizam-se 24 satélites “NAVSTAR” em volta da Terra, à distância de 10 900 milhas náuticas da superfície. Cada satélite tem a massa de 1900 libras.

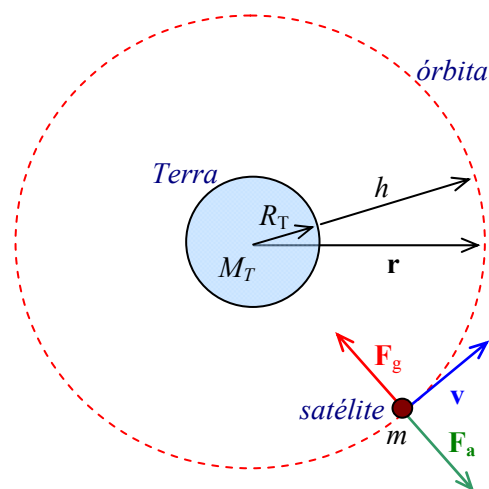
- Calcule a velocidade de rotação de cada satélite.
- Qual a energia cinética de cada satélite?
- Qual o número máximo de satélites que se conseguem observar a partir da superfície da Terra, supondo que se encontram todos na mesma órbita (não é o caso: há 6 órbitas diferentes com 4 satélites em cada uma).

Resolução:

- Velocidade de rotação

O satélite está sujeito a duas forças:

- Força de atracção gravítica,  $F_g = G \frac{mM_T}{r^2}$
- Força de inércia,  $F_a = m\omega^2 r$   
 $G$  – constante de atracção universal,  $6,673 \times 10^{-11} \text{ N m}^{-2} \text{ kg}^2$ ,  
 $m$  – massa do satélite, 1900 lb,  
 $M_T$  – massa da Terra,  $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  
 $r$  – distância entre os centros de massas,  
 $\omega$  – velocidade angular do satélite.



A órbita mantém-se estável se  $F_a = F_g$ . Substituindo os seus valores, dados acima,

vem  $G \frac{mM_T}{r^2} = m\omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r^3}}$ . Notando que  $r = R_T + h$ , em que  $R_T$  = raio da

Terra =  $6.37 \times 10^6 \text{ m}$  e  $h$  = altura do satélite, fica  $\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T + h)^3}}$ .

Substituindo valores numéricos (1 milha náutica internacional = 1852 m):

$$\omega = \sqrt{\frac{6.673 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}{(6.37 \times 10^6 + 10900 \times 1852)^3}} \text{ rad/s} \rightarrow \omega = 1,4596 \times 10^{-4} \text{ rad/s} = 2,0072 \text{ rot./dia.}$$

O período de rotação do satélite é  $T = 11 \text{ H } 57 \text{ m } 36 \text{ s}$ .

- Energia cinética:  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ . Como  $v = \omega r$  vem  $E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$  e  $1 \text{ lb} = 453.59 \text{ g}$ , vem,

$$E_c = \frac{1}{2} \times (1900 \times 0,45359) \times (1,4596 \times 10^{-4})^2 \times (6370000 + 10900 \times 1,852)^2 \text{ J} = 6,47 \text{ MJ}$$

(Qual a velocidade linear do satélite?)

c) Satélites observáveis: A distância angular entre satélites, supostos na mesma órbita, seria  $\alpha = \frac{2\pi}{24}$  rad = 0,262 rad. O campo de visão à superfície da Terra corresponde ao ângulo  $2\beta$  tal que  $\cos \beta = \frac{R_T}{r}$ . Substituindo valores numéricos obtém-se  $\cos \beta = 0,23986 \rightarrow \beta = 1,3286$  rad. O ângulo de visão é pois de 2,657 rad, que daria para ver 10 ou 11 satélites em simultâneo. É no entanto necessário cobrir toda a superfície esférica em volta da Terra, e não apenas uma circunferência, motivo pelo qual há 6 órbitas distintas.

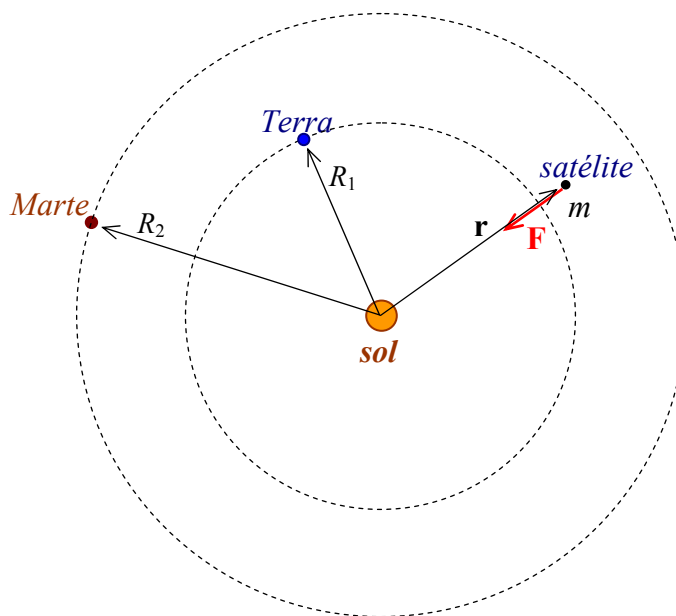
### 1.8.15. Probl. 1. 15 – Força e trabalho

Uma sonda interplanetária tem a massa de 72 kg e é atraída (apenas) pelo Sol.

- Represente a força de atracção do Sol entre as órbitas da Terra e de Marte.
- Calcule o trabalho necessário para fazer a sonda mudar de posição, desde a órbita terrestre até à órbita de Marte.

*Resolução:*

Admite-se que as órbitas são circunferências. No desenho ao lado estas estão aproximadamente à escala. O diâmetro do Sol não se encontra à escala, uma vez que é cerca de 200 vezes inferior ao da órbita da Terra.



- A força de atracção do Sol segue a lei da atracção universal pelo que é dirigida do satélite para o Sol. O seu módulo é

$$\text{dado por } F = G \frac{Mm}{r^2}$$

- A energia necessária para transportar a sonda desde a órbita terrestre até à órbita de Marte será dada por

$$E = \int_{R_1}^{R_2} G \frac{Mm}{r^2} dr$$

Este trabalho é independente da posição em que o satélite será colocado na órbita, desde que se ignorem as forças de atracção da Terra e de Marte (porquê?).

Resolvendo a expressão anterior vem:  $E = - \left[ G \frac{Mm}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = GMm \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

*Aplicação numérica:*

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^{-2} \text{ kg}^{-2}$$

$$R_1 = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$R_2 = 2,28 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$M = 1,991 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$m = 72 \text{ kg}$$

$$E = 6,673 \times 10^{-11} \times 1,991 \times 10^{30} \times 72 \times \left( \frac{1}{1,496 \times 10^{11}} - \frac{1}{2,28 \times 10^{11}} \right) \text{ J} = 220 \times 10^8 \text{ J} = 22 \text{ GJ}$$

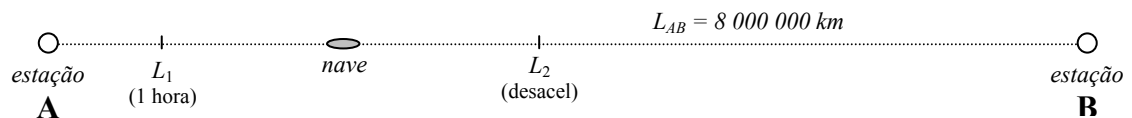
**1.8.16. Probl. 1. 16 – Força e energia**

Uma nave espacial, com a massa de 6400 kg, procura percorrer a distância entre duas estações espaciais no mínimo de tempo. As estações encontram-se a 8 000 000 km, fixas uma em relação à outra. A nave, sendo tripulada, não pode exceder a aceleração de 2.5 g. Devido a limitações com o aquecimento dos propulsores, estes só podem estar ligados à potência nominal durante o máximo de 1 h, devendo a seguir trabalhar a 1/10 da potência (a que corresponde uma aceleração de 0.25 g). Nestas condições calcule:

- A força desenvolvida pelos propulsores durante a 1ª hora.
- A energia cinética que a nave adquire ao fim de 1 hora.
- O tempo mínimo que leva a percorrer a distância entre as estações e a velocidade a que chega.
- Se quiser chegar ao destino com velocidade nula e só puder desacelerar com -0,25g, quando é que deve inverter os propulsores e qual o tempo total da viagem?

Resolução:

Esquemáticamente tem-se:



a)  $F = ma \quad a = 2,5 g \rightarrow F = 2,5mg \rightarrow F = 2,5 \times 6400 \times 9,8 \text{ N} = 156 800 \text{ N} = 16 \text{ T}$

b) É necessário saber-se a velocidade ao fim de uma hora:

$$v = v_0 + at, \quad v_0 = 0, \quad a = 2,5g = 24,5 \text{ m/s}^2, \quad t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \rightarrow v_1 = 88 200 \text{ m/s} = 317 520 \text{ km/h}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0,5 \times 6400 \times (88200)^2 \text{ J} = 2,489 \times 10^{13} \text{ J}$$

c) O espaço total é percorrido durante a 1ª hora com aceleração 2,5g ( $e_1$ ) e durante o resto do tempo com aceleração 0,25g ( $e_2$ ).

$$e_1 = e_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_1t^2, \quad e_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad a_1 = 2,5g = 24,5 \text{ m/s}^2, \quad t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \rightarrow e_1 = 158 760 000 \text{ m}$$

$$e_2 = e_1 + v_1t + \frac{1}{2}a_2t^2, \quad e_1 \text{ e } v_1 \text{ calculados acima, } a_2 = 0,25g = 2,45 \text{ m/s}^2. \text{ Como } e_2 = L_{AB}$$

vem

$$v_1t + \frac{1}{2}a_2t^2 = L_{AB} - e_1, \quad 88200 \times t + 0,5 \times 2,45 \times t^2 = 800000000 - 158760000 \rightarrow t = 5,173 \times 10^4 \text{ s}$$

A este valor é necessário acrescentar 1 h da 1ª parte do percurso, logo  $t = 15\text{h}:22\text{m}:10 \text{ s}$ .

$$v_2 = v_1 + a_2t, \quad v_2 = 88200 + 0,245 \times 5,173 \times 10^4 \text{ m/s} = 100 873 \text{ m/s}$$

d) Designando por  $v_1$  e  $e_1$  a velocidade ao fim de uma hora e o respectivo espaço percorrido, por  $v_2$  e  $e_2$  a velocidade no local onde de começa a dar a desaceleração e o

espaço percorrido desde  $e_1$ , e por  $v_3$  e  $e_3$  as correspondentes grandezas ao chegar à estação B, será, para as velocidades:

$v_1 = v_0 + a_1 t_1$ ,  $v_2 = v_1 + a_2 t_2$ ,  $v_3 = v_2 + a_3 t_3 = 0$  (pretende-se  $v_3 = 0$ ). Substituindo a 1ª eq. na 2ª e a 2ª na 3ª vem, atendendo a que  $a_1 = 2,5g$ ,  $a_2 = 0,25g$  e  $a_3 = -0,25g$ ,  $t_3 = 10 t_1 + t_2$ .

Para os espaços será:

$e_1 = e_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2$ ,  $e_2 = e_1 + v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2$ ,  $e_3 = e_2 + v_2 t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2 = Lab$ , donde se tira, substituindo  $t_3$  pelo valor anterior,  $t_2 = 1,745 \times 10^4$  s, e portanto  $t_3 = 5,345 \times 10^4$  s. O tempo total percorrido será  $t_{tot} = t_1 + t_2 + t_3 = 7,450 \times 10^4$  s, ou seja 20h: 41m: 43s.

### 1.8.17. Probl. 1. 17 – Atracção universal

Tomando como base a lei da atracção universal e a expressão da aceleração centrípeta, determine o valor da aceleração da gravidade (campo gravítico terrestre) em dois pontos à superfície da Terra: um no pólo e outro no equador.

Dados: Raio médio da Terra,  $R = 6,37 \times 10^6$  m  
 Massa da Terra,  $M = 5,98 \times 10^{24}$  kg  
 Constante de gravitação,  $G = 6,673 \times 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>kg<sup>-2</sup>.

Resolução:

Pode em primeira aproximação considerar-se a Terra homogénea. Nestas condições pode, para efeito da aplicação da lei da atracção universal, pode considerar-se a massa da Terra toda concentrada no seu centro. Nos pólos apenas se faz sentir a lei da atracção universal. No equador também se faz sentir a força centrífuga, devido ao facto de a Terra se encontrar em movimento de rotação. A acção do Sol e dos outros planetas e estrelas é desprezável (já alguém calculou!).

Força por unidade de massa (aceleração) devido à atracção universal:

$$g_1 = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,673 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{(6,37 \times 10^6)^2} = 9,834 \text{ ms}^{-2}$$

Esta aceleração é dirigida da superfície para o centro da Terra.

Força por unidade de massa (aceleração) devido à rotação da Terra:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \text{ rad/s} = 7,2921 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \text{ (Note-se que o período de rotação da Terra não é$$

$24 \times 60 \times 60 = 86400$  s mas um pouco inferior).

$g_2 = \omega^2 R = (7,2921 \times 10^{-5})^2 \times 6,37 \times 10^6 \text{ m/s}^2 = 0,034 \text{ m/s}^2$ . Esta força é dirigida do centro da Terra para a periferia.

Portanto: no pólo será  $g = g_1 = 9,834 \text{ ms}^{-2}$   
 no equador  $g = g_1 - g_2 = (9,834 - 0,034) \text{ ms}^{-2} = 9,800 \text{ ms}^{-2}$ .

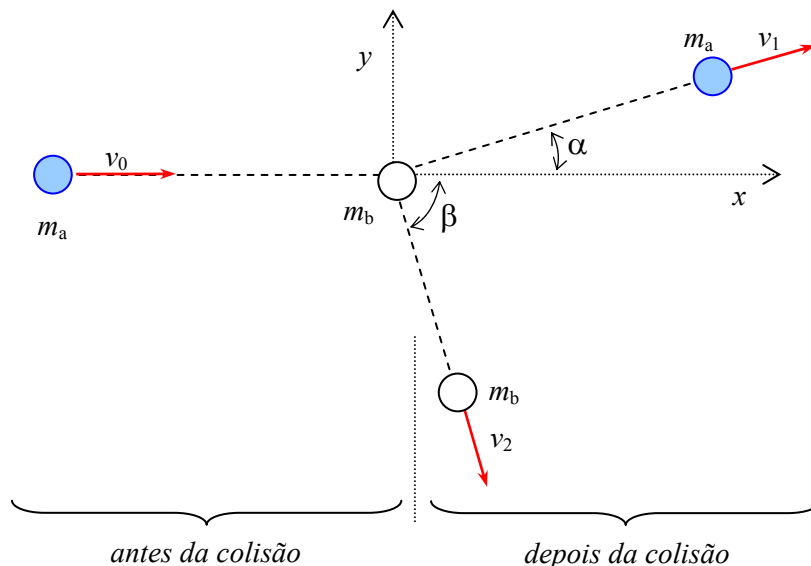
**1.8.18. Probl. 1. 18 - Conservação do momento linear**

Num jogo de Snooker uma bola azul é lançada a 2 m/s em direcção a uma bola branca que se encontra parada. Após a colisão a bola azul segue uma trajectória que faz um ângulo de  $18^\circ$  com a sua direcção inicial. As bolas têm massas iguais. Nestas condições determine:

- O ângulo que, após a colisão, a bola branca faz com a direcção inicial da bola em movimento.
- As velocidades das bolas após a colisão.
- A velocidade do centro de massas do sistema constituído pelas duas bolas, antes e depois da colisão.

*Resolução:*

- Vai representar-se o sistema constituído pelas duas bolas. No mesmo diagrama estão as bolas antes e depois da colisão.



- Vai utilizar-se o teorema da conservação da energia mecânica e o teorema do momento linear, antes e depois do choque. Pelo teorema da conservação da energia, uma vez que só há energia cinética em jogo (as bolas estão no mesmo plano horizontal), será:

$$\frac{1}{2} m_a v_0^2 = \frac{1}{2} m_a v_1^2 + \frac{1}{2} m_b v_2^2 \quad (1)$$

Pelo teorema da conservação do momento linear, será:

$$m_a \mathbf{v}_0 = m_a \mathbf{v}_1 + m_b \mathbf{v}_2$$

Esta equação desdobra-se em duas, uma segundo o eixo dos  $xx$  e outra segundo  $y$ :

$$\begin{cases} m_a v_0 = m_a v_1 \cos \alpha + m_b v_2 \cos \beta & (2) \\ 0 = m_a v_1 \sin \alpha - m_b v_2 \sin \beta & (3) \end{cases}$$

Tem-se assim um sistema de 3 equações independentes (numeradas) a 3 incógnitas,  $\beta$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ . as massas são supostamente conhecidas. No caso deste problema  $m_a = m_b$ , pelo que as equações anteriores se simplificam:

$$\begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 & (4) \\ v_0 = v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta & (5) \\ 0 = v_1 \sin \alpha - v_2 \sin \beta & (6) \end{cases}$$

Antes de substituir  $\alpha$  pelo seu valor eleve-se a equação (5) ao quadrado e substitua-se  $v_0^2$  dado por (4). Obtém-se notando que  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$v_1^2 \sin^2 \alpha + v_2^2 \sin^2 \beta = v_1 v_2 \cos \alpha \cos \beta \quad (7)$$

Elevando (6) ao quadrado vem

$$v_1^2 \sin^2 \alpha + v_2^2 \sin^2 \beta = v_1 v_2 \sin \alpha \sin \beta \quad (8)$$

Combinando (7) e (8) e atendendo à fórmula do  $\cos(x+y)$  fica

$$\cos(\alpha + \beta) = 0 \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

As bolas seguem, após a colisão, trajetórias perpendiculares. Tem-se assim  $\beta = 72^\circ$ .

b) Para a determinação de  $v_1$  e de  $v_2$  utilizam-se as equações (5) e (6) que são lineares:

$$\begin{cases} 0,951v_1 + 0,309v_2 = 2 \\ 0,309v_1 - 0,951v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = 1,092 \text{ m/s} \\ v_2 = -0,618 \text{ m/s} \end{cases}$$

Os valores de  $v_1$  e de  $v_2$  confirmam a equação (4). Note-se o sinal – em  $v_2$ .

c) Como depois de iniciado o movimento não há forças externas sobre o sistema das duas bolas, o centro de massas não modifica a sua velocidade (e consequentemente não modifica a trajetória) após a colisão.

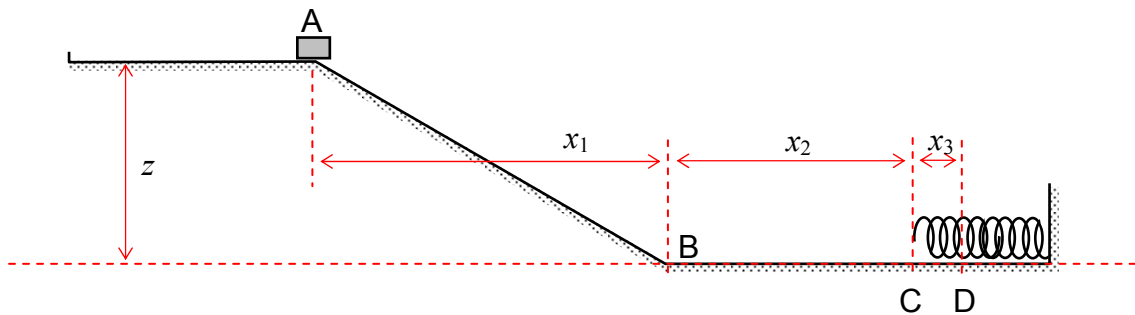
$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \rightarrow \mathbf{V} = \frac{\sum m_i \mathbf{v}_i}{\sum m_i}$$

Para este sistema é  $\mathbf{V} = \frac{m_a \mathbf{v}_1 + 0}{m_a + m_b} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_1 = 1 \text{ m/s}$  no sentido do eixo dos  $xx$ .

**1.8.19. Probl. 1. 19 - Conservação da energia**

Um paralelepípedo com a massa de 2.26 kg é largado do ponto mais alto de uma rampa, sem velocidade inicial, como indicado na figura, descrevendo, da esquerda para a direita, a trajetória  $\overline{ABCD}$ , em que C é o extremo da mola em repouso e D corresponde à compressão máxima que a mola atinge. Desprezando o atrito,

- Calcule as energias cinética e potencial do bloco nas posições A, B, C e D. Qual a diferença de significado entre a energia potencial em A e em D?
- Determine a constante de elasticidade da mola, supondo que esta é linear ( $F = kx$ ) e com o choque comprime de 10,0 cm.
- Que trajetória descreve o bloco em sentido inverso?
- Supondo que no percurso  $\overline{BCD}$  se perde 2,8 % da energia mecânica total inicial, onde é que o bloco pára quando faz o percurso contrário?



Dados:  $x_1 = 3,2$  m,  $x_2 = 1,8$  m,  $x_3 = 0,1$  m,  $z = 2,0$  m.

*Resolução:*

- a) A energia mecânica total conserva-se, sendo igual em A, B, C e D, (está-se a desprezar o atrito).

No ponto A existe apenas energia potencial, uma vez que o bloco se encontra em repouso:

Energia potencial gravítica:  $E_p = mgh$ . Em A será  $E_{pA} = 2,26 \times 9,8 \times 2,0 = 44,296$  J.

No ponto B existe apenas energia cinética, resultante da transformação da energia potencial de A.

No ponto C a situação é análoga à do ponto B.

No ponto D existe apenas energia potencial, não gravítica mas devido à compressão da mola.

Pode construir-se a seguinte tabela:

Tipo de energia	A	B	C	D
$E_c$ (cinética)	0	44,296 J	44,296 J	0
$E_p$ (gravítica)	44,296 J	0	0	0
$E_p$ (na mola)	0	0	0	44,296 J
$E_t$ (total)	44,296 J	44,296 J	44,296 J	44,296 J

b) A energia potencial elementar na mola é dada por  $dE_p = Fdx \rightarrow E_p = \int_0^{x_3} kx dx = \frac{1}{2}kx_3^2$

$$\rightarrow k = \frac{2E_p}{x_3^2}$$

Substituindo valores numéricos:  $k = \frac{2 \times 44,296}{0,1^2} = 8859 \text{ N/m}$ .

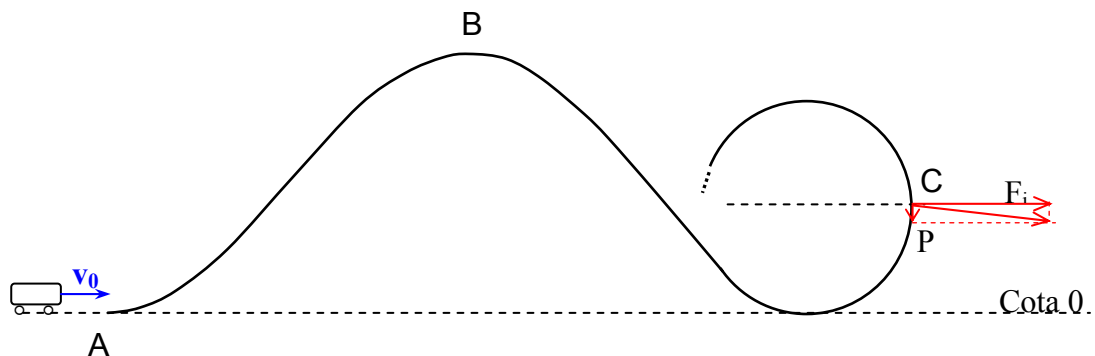
c) Em sentido contrário o bloco descreve a trajectória  $\overline{DCBA}$  e vai parar no ponto de partida, A. Isto porque não há dissipação de energia.

d) Perdendo 2,8% de  $B \rightarrow D$ , o bloco chega a D com  $(1-0,028) \times 44,296 = 42,976 \text{ J}$ . É de admitir que haja uma dissipação análoga de  $D \rightarrow B$ , pelo que o bloco, em sentido inverso, chegará a B com  $(1-0,028) \times 42,976 = 41,695 \text{ J}$ . Neste ponto esta energia é cinética, e irá, ao subir em direcção a A, ser transformada em energia potencial:  
 $mgh = 41,695 \rightarrow h = 1,88 \text{ m} (< 2,0 \text{ m})$ .

## 1.8.20. Probl. 1. 20 - Conservação da energia

Numa montanha russa o comboio é lançado horizontalmente a 140 km/h de encontro à base da montanha (A) e atinge o cimo (B) a 15 km/h, sem lhe ser fornecida energia. A seguir começa a descer e efectua um “looping” circular, como indicado na figura.

- Qual a altura da montanha em relação à cota 0? (de A para B as forças de atrito absorvem 3 % da energia inicial).
- Supondo que o diâmetro do “looping” é de 50 m, qual a força a que, no ponto (C), a metade da altura da circunferência, fica sujeita uma carruagem com a massa total de 2500 kg? De B para C não considere o atrito.



Dados:  $v_0 = 140 \text{ km/h}$ ,  $v_1 = 15 \text{ km/h}$

Resolução:

- a) A energia total em B é igual a 97% da energia total em A:

$$E_{tB} = 0,97 \times E_{tA} \rightarrow 0,97 \times (E_{pA} + E_{cA}) = (E_{pB} + E_{cB}) \rightarrow$$

$$0,97 \times \left( 0 + \frac{1}{2} m v_0^2 \right) = m g h + \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\rightarrow h = \frac{0,97 \times v_0^2 - v_1^2}{2g} \rightarrow h = \frac{0,97 \times (140/3,6)^2 - (15/3,6)^2}{2 \times 9,80} \text{ m} \rightarrow h = 76,3 \text{ m}$$

- b) A energia total em C é igual à energia total em B, ou seja igual a 97% da energia total em A:

$$0,97 \times \frac{1}{2} m v_0^2 = m g h_C + \frac{1}{2} m v_2^2 \rightarrow 0,97 \times v_0^2 = 2 g h_C + v_2^2 \rightarrow$$

$$v_2^2 = 0,97 \times 140^2 - 2 \times 9,80 \times 25 = 18522 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

A força de inércia, em C, é horizontal tendo valor  $m v^2/R$ , ou seja  $F_i = 2500 \times 18522/25$   
 $N = 189 \text{ T}$

A força aplicada em C é a resultante desta força de inércia e do peso,  $P = 2,5 \text{ T}$ .

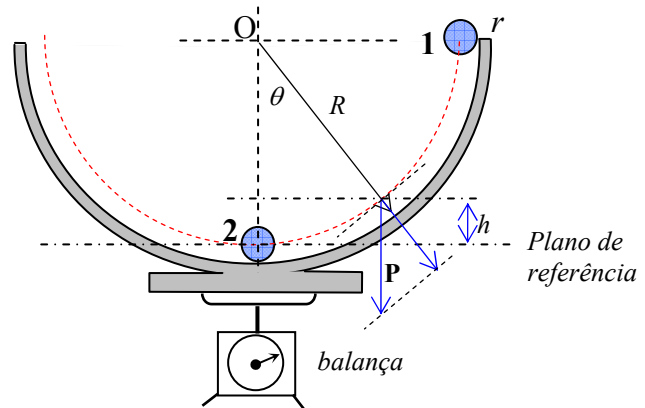
Estas forças encontram-se esquematizadas na figura.

**1.8.21. Probl. 1. 21 – Mov. Circular e energia cinética**

Uma esfera sólida e uniforme é deixada cair da posição 1, sem velocidade inicial, para o interior de uma campânula semi-esférica, como se indica na figura.

São dados: Raio interior da campânula,  $R=30$  cm; raio da esfera  $r=1,2$  cm, massa da campânula,  $M=12,7$  kg, massa da esfera,  $m = 54,3$  g. Considere que a balança é rígida e despreze a dissipação de energia por atrito.

Nestas condições determine:



- c) A energia cinética da esfera quando passa pelo ponto 2, e a sua velocidade linear.
- d) A sua velocidade angular e a força que exerce sobre a campânula, ao passar em 2.
- e) A expressão analítica da força exercida sobre a campânula, em função de  $\theta$ , tal com seria indicada pela balança.

*Resolução:*

- a) Há conservação da energia mecânica:  $E_t = C^{te}$ . No ponto 1 uma vez que a esfera se encontra parada, e tomando como plano de referencia o indicado na figura, apenas existe energia potencial:  $E_t = E_p = mgh = 0,0543 \times 9,80 \times (0,30 - 0,012) \text{ J} = 0,153 \text{ J}$

No ponto 2 a energia cinética da esfera será  $E_c = 0,153 \text{ J}$ . A velocidade linear da esfera obtém-se a partir de  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \rightarrow v = 2,376 \text{ m/s}$

- b)  $\omega = \frac{v}{r} = \frac{2,376}{(0,30 - 0,012)} \text{ rad/s} = 8,25 \text{ rad/s}$ . A força exercida pela esfera sobre a campânula, no ponto 2, é dada pela soma do peso com a força de inércia:

$$F_2 = mg + \frac{mv^2}{r} = 0,0543 \times 9,80 + \frac{0,0543 \times 2,376^2}{(0,30 - 0,012)} \text{ N} = 1,597 \text{ N}$$

- c) A força indicada pela balança consta de 3 componentes:
  1. Devida ao peso da própria campânula,  $F_1$ , vertical, de módulo  $F_1 = Mg$
  2. Devida ao peso da esfera,  $F_2$ , que se encontra dentro da campânula, também vertical, dada em módulo por  $F_2 = mg \cos \theta$
  3. Devido à componente vertical da força de inércia,  $F_3$ , (a força de inércia é radial). O módulo da força de inércia é dado por  $mv^2/(R-r)$ , sendo a sua componente vertical, dada por  $mv^2/(R-r) \cdot \cos \theta$ . A velocidade pode ser obtida a partir da expressão da energia cinética, que por sua vez resulta da transformação da energia potencial:

$$E_c + E_p = C^{te} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgh = mg(R-r); \text{ mas } h = (R-r)(1 - \cos \theta) \rightarrow$$

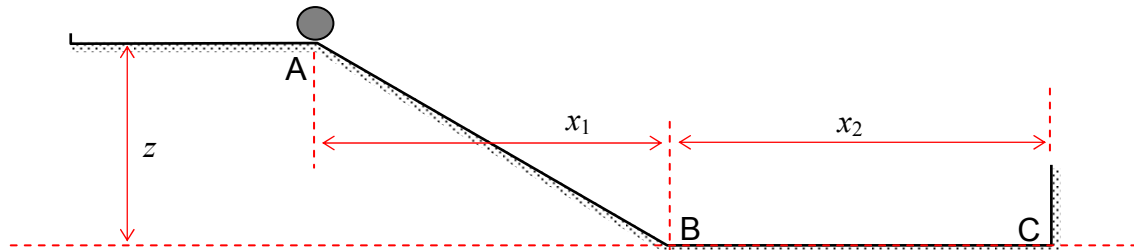
$$v^2 = 2g(R-r) \cos \theta \text{ e portanto } F_3 = 2mg \cos^2 \theta. \text{ A força lida pela balança será}$$

$$\text{pois, } F = F_1 + F_2 + F_3, \text{ ou seja } F = Mg + mg \cos \theta + 2mg \cos^2 \theta$$

**1.8.22. Probl. 1. 22 – Energia de rotação**

Uma esfera maciça é largada do ponto mais alto de uma rampa, sem velocidade inicial, como indicado na figura, descrevendo, da esquerda para a direita, a trajetória  $\overline{A,B,C}$ , em que C é o fim do percurso. Existe contacto perfeito entre a superfície da esfera e o plano por onde ela rola.

Calcule as energias cinética, de rotação e potencial da esfera nas posições A, B, e C.



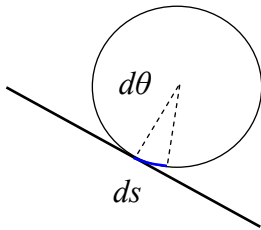
Dados:  $x_1 = 3,2$  m,  $x_2 = 1,8$  m,  $z = 2,0$  m, massa da esfera  $m = 1,25$  kg, raio  $R = 5$  cm.

Momento de inércia de uma esfera maciça:  $I = \frac{2}{5} mR^2$

*Resolução:*

Na posição A a esfera não se encontra a rodar e a sua velocidade é zero. Portanto apenas possui energia potencial, cujo valor é dado por  $E_{pA} = mgz$ .

Ao cair de  $A \rightarrow B$  a esfera vai rolar sobre a rampa, adquirindo energia cinética de rotação e energia cinética de translação. Para uma rotação elemental  $d\theta$  o espaço percorrido será  $ds = R d\theta$ .



O comprimento  $\overline{AB}$  é dado por  $L_{AB} = \sqrt{z^2 + x_1^2}$  e o número de rotações que a esfera dá ao descrever este comprimento será  $n = L_{AB} / 2\pi R$ .

A sua energia no ponto B será constituída pela energia cinética e pela energia de rotação, sendo a energia potencial nula, devido à conservação da energia mecânica:

$$E_t = E_c + E_r = E_{pA}.$$

A energia cinética calcula-se pela expressão  $E_c = 1/2 mv^2$  e a energia de rotação por  $E_r = 1/2 I\omega^2$  em que  $I$  é o momento de inércia. Será pois  $E_t = 1/2 mv^2 + 1/2 I\omega^2$ . Atendendo a que a esfera tem contacto perfeito com a superfície por onde rola tem-se

$$ds = R d\theta, \text{ ou seja } v = \omega R, \text{ pelo que } E_t = \frac{1}{2} m(\omega R)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} mR^2 \omega^2 = E_t = 0,7 \times mR^2 \omega^2.$$

*Aplicação numérica:*

No ponto A:  $E_{pA} = 1,25 \times 9,80 \times 2,0$  J = 24,5 J.

No ponto B:  $0,7 \times 1,25 \times 0,05^2 \times \omega^2 = 24,5 \rightarrow \omega = 105,83$  rad/s.

$$E_c = \frac{1}{2} m(\omega R)^2 = 17,5$$
 J,  $E_r = \frac{1}{5} m(\omega R)^2 = 7,0$  J.

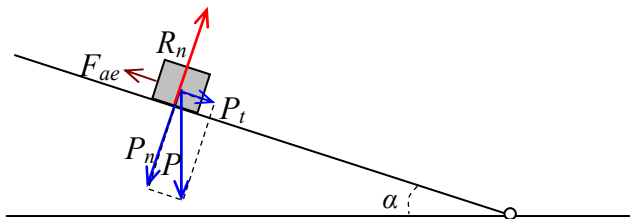
Na posição C, uma vez que o movimento se faz sem atrito, os valores das energias são iguais aos valores de B.

**1.8.23. Probl. 1. 23 – Atrito**

Um bloco, com a forma de um paralelepípedo de dimensões  $a, b, c$ , encontra-se parado sobre um plano inclinado, existindo atrito entre a sua superfície de apoio e o plano. Foi-se aumentando lenta e progressivamente o ângulo da rampa com a horizontal,  $\theta$ , até que o bloco começou a deslizar.

- Determine o coeficiente de atrito estático entre as superfícies em contacto.
- Supondo que o bloco é de aço ( $d = 7,5$ ), e que  $a = b = 5$  cm e  $c = 10$  cm, determine a força de atrito estático quando o bloco se encontra deitado e quando se encontra ao alto, para  $\theta = 18^\circ$ .
- Como procederia para determinar o coeficiente de atrito cinético?

Resolução:



- As forças intervenientes encontram-se indicadas na figura:

- $P$  – peso do corpo
- $P_n$  – componente normal do peso
- $P_t$  – componente tangencial
- $R_n$  – reacção normal da superfície
- $F_{ae}$  – força de atrito estático

Uma característica da força de atrito é que esta é proporcional à força de reacção normal:

$$F_{ae} = \mu_e R_n$$

Mas  $R_n = P_n = mg \cos \theta$  e  $F_{ae} = P_t = mg \sin \theta$ , logo,  $\mu_e = \tan \theta$

- A posição do bloco é irrelevante para o cálculo da força de atrito, apenas poderá ter a ver com a estabilidade mecânica do sistema. Com as dimensões do bloco e com a sua densidade calcula-se o seu peso, e com ele e com  $\mu_e$  calcula-se a força de atrito estático:

$$P = abc\rho g = 0,05 \times 0,05 \times 0,10 \times 7500 \times 9,8 \text{ N} = 18,375 \text{ N}$$

$$F_{ae} = \mu_e R_n = \tan \theta \times mg \cos \theta = mg \sin \theta.$$

$$\text{Para } \theta = 18^\circ \text{ será } F_{ae} = 18,375 \times \sin 18^\circ \text{ N} = 5,678 \text{ N}$$

- Depois do bloco ter iniciado o movimento ia baixando o ângulo da rampa até obter uma velocidade constante.

Outro método, mais controlável consiste em introduzir uma força oposta a  $P_t$ , por meio de uma roldana e de uma massa que se possa deslocar na vertical e procurar o ângulo que conduz a uma aceleração nula. Deduzindo a expressão que relaciona  $a, \mu_c, m_1, m_2$ , e  $\theta$  pode calcular-se  $\mu_c$ .

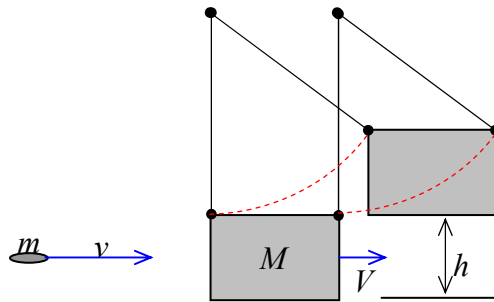
**1.8.24. Probl. 1. 24 – Pêndulo balístico**

Um pêndulo balístico é constituído por um bloco de madeira com a massa de 1,333 kg, suspenso por 4 fios inextensíveis, que se comporta como um pêndulo gravítico. Disparou-se sobre ele uma bala de massa 25 g, tendo-se verificado que o bloco (com a bala incrustada) se elevou de 48 cm.

- Determine a velocidade da bala no instante em que se dá o impacto com o bloco.
- Calcule a elevação de temperatura da bala, sabendo que o calor específico do material da bala é de  $0,109 \text{ cal.g}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ . Considere a madeira como isolante térmico.

*Resolução:*

- Esta alínea resolve-se em duas fases. Na primeira (colisão inelástica) há conservação de momento linear. A energia mecânica não se conserva, pois parte é transformada em calor. Antes do impacto, o momento linear do sistema constituído pela bala e pelo bloco, ainda separados, e com o bloco parado, é dado por  $mv$ .



Depois do impacto o momento linear do mesmo sistema, bloco com a bala incrustada, que arranca com velocidade  $V$ , é dado por  $(m+M)V$ . Tem-se assim  $V = \frac{m}{m+M}v$

Na 2ª fase, a seguir ao impacto o bloco eleva-se de  $h$ . Há conservação de energia mecânica. A energia cinética do bloco+bala é transformada em energia potencial:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh.$$

Substituindo o valor de  $V$  obtido acima fica  $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$

*Aplicação numérica:*

$$v = \frac{0,024 + 1,333}{0,025} \sqrt{2 \times 9,80 \times 0,48} \text{ m/s} = 166,6 \text{ m/s}.$$

- A diferença entre as energias cinética da bala e da bala+bloco é transformada em calor (supõe-se que o aquecimento da bala se dá na 1ª fase):

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2} \frac{mM}{m+M} v^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0,025 \times 1,333}{0,025 + 1,333} \times 166,6^2 \text{ J} = 340,56 \text{ J}$$

Mas  $Q = mc\Delta T$  e portanto, como  $Q = \Delta E_c$ , vem  $mc\Delta T = \Delta E_c \rightarrow \Delta T = \frac{\Delta E_c}{mc}$

*Aplicação numérica:*

$$\Delta T = \frac{340,56 \times 0,24}{0,025 \times 0,109 \times 10^3} \text{ °C} = 30,0 \text{ °C}$$

(Os factores 0,24 e  $10^3$  destinam-se a converter o calor específico que é dado em calorias por grama por grau Celsius).

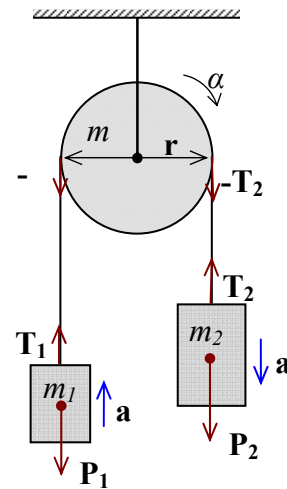
**1.8.25. Probl. 1. 25 – Movimento de rotação e translação**

Dois corpos sólidos 1 e 2, com as massas  $m_1$  e  $m_2$ , estão ligados por um fio inextensível de massa desprezável, que passa pela gola de uma roldana. Esta tem raio  $r$  e massa  $m$ . Sabendo que o momento de inércia da roldana em relação ao seu eixo de rotação é dado por  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , determine:

- O valor da aceleração com que desce o corpo 1.
- As tensões exercidas pelo fio sobre os corpos 1 e 2.
- Faça uma aplicação numérica para  $m_1 = 2$  kg e  $m_2 = 3$  kg,  $r = 16.8$  cm e  $m = 1,62$  kg.

*Resolução:*

Esquematize-se o problema e indiquem-se as forças em jogo (ver figura).



- Em relação à roldana aplica-se o teorema da variação do momento angular:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_0$$

Mas  $\vec{L} = I\vec{\omega} \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$ . Logo  $I\vec{\alpha} = \sum \vec{M}_0$ .

Para o sistema de forças aplicadas à roldana será, em módulo

$$I\alpha = r(T_2 - T_1)$$

Como  $\alpha = \frac{a}{r}$  e  $I = \frac{1}{2}mr^2$  vem  $\frac{1}{2}ma = (T_2 - T_1)$ .

Aplique-se agora a 2ª lei de Newton aos corpos 1 e 2:

$$\text{Corpo 1: } m_1a = T_1 - P_1 \rightarrow T_1 = m_1a + P_1 \quad \text{Corpo 2: } m_2a = P_2 - T_2 \rightarrow T_2 = P_2 - m_2a$$

Substituindo  $T_1$  e  $T_2$  na expressão obtida para  $a$  vem

$$a = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g$$

- As tensões obtêm-se substituindo o valor de  $a$  nas expressões de  $T_1$  e de  $T_2$ :

$$T_1 = P_1 + m_1 \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g \quad \text{e} \quad T_2 = P_2 - m_2 \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{2}m + m_1 + m_2} g$$

- Aplicação numérica:*

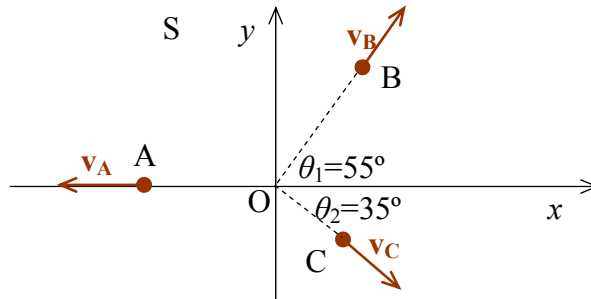
$$a = \frac{3 - 2}{\frac{1}{2}1,62 + 2 + 3} g = 0,172 g = 1,69 \text{ ms}^{-2}$$

$$T_1 = m_1a + m_1g = 2 \times (0,169 + 9,8) \text{ N} = 22,98 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2g - m_2a = 3 \times (9,80 - 0,169) \text{ N} = 24,33 \text{ N}$$

1.8.26. Probl. 1. 26 – Conservação do momento linear

Um corpo em repouso na origem do referencial S explode, partindo-se em 3 fragmentos. Após a desintegração os fragmentos deslocam-se num plano horizontal, como indicado na figura.



Dados:  
 $m_A=0,50$  kg  
 $m_B=0,30$  kg  
 $m_C=0,20$  kg

- Determine, no referencial S, as velocidades dos fragmentos B e C, sabendo que  $v_A = 40$  m/s.
- Compare a energia mecânica do sistema antes e depois da explosão. Como interpreta os valores encontrados?
- Sem recorrer aos valores determinados nas alíneas anteriores, diga qual a trajetória do centro de massas do sistema após a explosão.

Resolução:

- Utiliza-se o teorema da conservação do momento linear:  $\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_d$ , em que  
 $\mathbf{p}_a$  = momento linear do sistema de partículas antes da explosão (apenas um corpo em repouso)  
 $\mathbf{p}_d$  = momento linear do sistema depois da explosão (3 fragmentos afastando-se sobre um plano)

O problema deverá agora ser separado em 2, um segundo o eixo dos  $x$  e outro segundo  $y$ :

$$\begin{aligned} \text{Segundo } x: & \quad \begin{cases} 0 = -m_A v_A + m_B v_B \cos \theta_1 + m_C v_C \cos \theta_2 \\ \text{Segundo } y: & \quad \begin{cases} 0 = m_B v_B \sin \theta_1 - m_C v_C \sin \theta_2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo valores numéricos

$$\begin{aligned} \text{Segundo } x: & \quad \begin{cases} 0,30v_B \cos 55^\circ + 0,20v_C \cos 35^\circ = 0,50v_A \\ \text{Segundo } y: & \quad \begin{cases} 0,30v_B \sin 55^\circ - 0,20v_C \sin 35^\circ = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Resolvendo em ordem a  $v_B$  e  $v_C$  obtém-se  $v_B = 38,24$  m/s e  $v_C = 81,92$  m/s

- A energia mecânica é aqui constituída por energia cinética e energia potencial. Como tudo se desenrola num plano, podemos-lo considerar como plano de referência (cota 0), sendo sobre ele a energia potencial igual a zero. A energia cinética do sistema antes da explosão é nula, uma vez que o corpo se encontrava em repouso. Depois da explosão a energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i E_{ci} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 = \frac{1}{2} (0,50 \times 40^2 + 0,30 \times 38,24^2 + 0,20 \times 81,92^2) \text{ J} \\ &= 12,90 \text{ kJ} \end{aligned}$$

- c) A trajectória do centro de massas segue a 2ª lei de Newton:  $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^e$ . Uma vez que durante a explosão não há forças exteriores a actuar sobre o sistema, tem-se  $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{P} = 0 \rightarrow V_{CM} = 0$ . Como antes da explosão a velocidade do centro de massas é nula,  $V_{CM} = 0$ , também o será depois, ou seja, o centro de massas do sistema mantém-se no ponto em que se encontrava antes de se dar a explosão.

### 1.8.27. Probl. 1. 27 – Conservação do momento angular

Um disco roda em torno do seu eixo vertical com velocidade angular constante. Num determinado instante cai sobre ele um 2º disco, que tinha o mesmo eixo e se encontrava em repouso. Depois da queda do 2º disco os dois ficaram em contacto perfeito. O momento de inércia de um disco maciço e homogéneo, de massa  $M$  e raio  $R$ , em relação ao seu eixo é dado por  $I = 1/2MR^2$

- Determine a velocidade angular dos dois discos.
- Faça uma aplicação numérica para:
  - 1º disco,  $m_1 = 4,53$  kg;  $R_1 = 36$  cm,  $\omega_1 = 15$  rad/s.
  - 2º disco,  $m_2 = 1,82$  kg,  $R_2 = 32$  cm.

*Resolução:*

Utiliza-se o teorema do momento angular:

- A variação no tempo do momento angular de um sistema de partículas materiais em relação a um ponto é igual ao momento resultante das forças exteriores aplicadas ao sistema de partícula, em relação ao mesmo ponto:  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}^e$ .

Como no intervalo de tempo entre os instantes imediatamente antes e depois da queda do disco não há momentos de forças exteriores,  $\mathbf{L}$  mantém-se constante. Uma vez que  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ , pode escrever-se, igualando os momentos angulares antes e depois,

$$(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)_{antes} = (I_1\omega_1 + I_2\omega_2)_{depois} \rightarrow \frac{1}{2}m_1R_1^2\omega_1 + 0 = \left(\frac{1}{2}m_1R_1^2 + \frac{1}{2}m_2R_2^2\right)\omega \rightarrow$$

$$\omega = \frac{m_1R_1^2}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2}\omega_1$$

- Aplicação numérica:

$$\omega = \frac{4,53 \times 0,36^2}{4,53 \times 0,36^2 + 1,82 \times 0,32^2} \times 15 \text{ rad/s} = 11,4 \text{ rad/s.}$$

## 2. ELECTROMAGNETISMO

### 2.1. Electrostática

#### 2.1.1. Carga eléctrica

A observação experimental levou a concluir que os materiais exibem um comportamento que revela a existência de determinadas partículas, de dois tipos distintos, que interactuam entre si, e a que se deu o nome de *cargas eléctricas*. A estes dois tipos de cargas Franklin<sup>(4)</sup> deu o nome de *cargas eléctricas positivas* e *cargas eléctricas negativas*.

A observação experimental levou ainda à conclusão que as cargas eléctricas do mesmo tipo ou sinal se repelem e as cargas de sinal contrário se atraem. Além disso, num sistema fechado, *a quantidade total de carga eléctrica mantém-se constante*: sempre que há criação ou desaparecimento de carga eléctrica de um determinado sinal, há também a produção ou extinção de igual quantidade de carga de sinal contrário.

Millikan<sup>(5)</sup> observou que a carga eléctrica se encontra *discretizada*, sendo múltipla da carga elementar, representada por  $e$ . O electrão, partícula constituinte da matéria, tem carga eléctrica negativa de valor  $-e$ . Representando por  $q$  a quantidade de cargas eléctricas de um corpo, também designada por *quantidade de electricidade*, é sempre

$$q = ne$$

em que  $n$  é um inteiro, positivo nulo ou negativo. Também se diz que a quantidade de electricidade se encontra *quantificada*.

O comportamento das cargas eléctricas e de determinadas forças associadas constituem a base da *electricidade*, sendo o estudo da electricidade feito na *electrotecnia*.

Em muitas aplicações, em particular no domínio da electrotecnia, o valor de  $n$  é muito elevado, podendo deste modo tratar-se a quantidade de electricidade por *carga eléctrica* (e não cargas eléctricas), e associá-la a uma *variável contínua*.

As cargas eléctricas movimentam-se nos meios materiais de forma muito diversa, de acordo com o meio e por vezes também em função de condições externas. É utilizada a variável  $\sigma$ , designada por *condutividade do meio material*, para exprimir a forma como as cargas se deslocam num meio material. Os meios materiais em que algumas cargas eléctricas se movem livremente designam-se por *meios condutores da electricidade*, ou simplesmente, *condutores*; a sua condutividade é infinita. Os meios materiais em que as cargas eléctricas não se podem mover designam-se por *meios isoladores da electricidade*, ou simplesmente, *isoladores*; Também se lhes chama *dieléctricos*. A sua condutividade é nula. Há meios materiais em que as cargas se movem, mas não livremente. Têm uma condutividade com um valor intermédio, não próximo de zero ou de infinito: estão

---

<sup>4</sup> Benjamin Franklin, tipógrafo, cientista e político americano, 1706-1790.

<sup>5</sup> Robert Millikan, físico americano, 1868-1953, prémio Nobel em 1923.

aqui incluídos os **materiais semicondutores**, essenciais para o fabrico de componentes electrónicos.

A **Electrostática** estuda os fenómenos relacionados com **cargas eléctricas em repouso** (o conceito de repouso depende do referencial utilizado).

### 2.1.2. Lei de Coulomb<sup>(6)</sup>

A experiência mostra que as cargas eléctricas exercem forças de atracção ou repulsão entre elas. Considerem-se as cargas pontuais (do ponto de vista macroscópico concentradas num ponto), de valor  $q_1$  e  $q_2$ , à distância  $r$  uma da outra, e **estáticas**. A força  $\mathbf{F}_{12}$  exercida pela carga  $q_1$  sobre a carga  $q_2$  é dada pela **lei de Coulomb**:

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_{12} \quad (2.1)$$

em que  $k_e$  é uma constante que depende do meio material onde estão inseridas as cargas, designada por **constante de Coulomb**, e  $\mathbf{r}_{12}$  representa o vector unitário dirigido da carga  $q_1$  para a carga  $q_2$ . De acordo com esta expressão, a carga  $q_2$  é repelida pela carga  $q_1$  se  $q_1$  e  $q_2$  tiverem o mesmo sinal, e é atraída se os sinais de  $q_1$  e  $q_2$  forem opostos.

De acordo com a 3ª lei de Newton, a carga  $q_2$  exercerá sobre a carga  $q_1$  uma força  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ . Havendo várias cargas eléctricas a actuar sobre uma determinada carga, a força resultante deverá ser obtida efectuando a **composição vectorial** de cada uma das forças individuais.

A constante de Coulomb pode escrever-se sob outra forma:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \quad (2.2)$$

em que  $\epsilon$  se designa por **permeabilidade eléctrica** do meio.

A unidade de carga eléctrica do SI é designada por **coulomb**, símbolo C. A carga elementar tem o valor  $e = 1,602\ 19 \times 10^{-19}$  C e portanto a carga de 1 coulomb contém  $6,241\ 46 \times 10^{+18}$  cargas elementares. Para o espaço livre (vácuo) é  $\epsilon = \epsilon_0 = 8,854\ 18\ 817 \times 10^{-12}$  C<sup>2</sup>N<sup>-1</sup>m<sup>-2</sup>. À relação entre a permeabilidade eléctrica de um meio e a permeabilidade eléctrica do vácuo dá-se o nome de **constante dieléctrica** desse meio. Atendendo a (2.1) e a (2.2) a lei de Coulomb pode escrever-se

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{r}_{12} \quad (2.3)$$

### 2.1.3. Campo eléctrico

O **campo eléctrico** devido a uma carga eléctrica ou a um conjunto de cargas, é a força originada por estas cargas e que se manifesta sobre uma carga de valor unitário; depende das coordenadas de espaço. Por agora consideram-se as cargas em repouso ou estáticas.

---

<sup>6</sup> Charles Coulomb, físico francês, 1736-1806

Conceitualmente o campo eléctrico obtém-se medindo a força eléctrica  $\mathbf{F}_e$  (por agora devida a cargas estáticas) que se exerce sobre a carga de prova  $+q_0$ . Representa-se habitualmente por  $\mathbf{E}$ .

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q_0} \quad (2.4)$$

O campo eléctrico produzido por uma carga  $q$  será, pela lei de Coulomb, dado por

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_1 \quad (2.5)$$

em que  $\mathbf{r}_1$  é o vector unitário dirigido de  $q$  para  $+q_0$ . Se a carga que origina o campo for positiva este é dirigido no sentido dela para a carga de prova, se for negativa é dirigido em sentido contrário.

O campo eléctrico pode exprimir-se, no SI, em  $\text{NC}^{-1}$  (newton/coulomb). No entanto, como se verá adiante, a unidade oficialmente utilizada é o  $\text{Vm}^{-1}$  (volt/metro).

O campo eléctrico produzido num ponto P do espaço por uma distribuição de  $N$  cargas discretas  $q_i$  será dado por

$$\mathbf{E} = k_e \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{r}_i \quad (2.6)$$

em que  $\mathbf{r}_i$  é o vector unitário dirigido do ponto em que se encontra  $q_i$  para P.

#### 2.1.4. Densidade de carga

Muitas vezes, em lugar de se ter uma distribuição de cargas discretas, estas são em número muito elevado e encontram-se distribuídas por uma determinada região do espaço, formando, do ponto de vista macroscópico, uma **distribuição contínua de cargas**. Se a carga eléctrica  $q$  se encontrar uniformemente distribuída pelo volume  $V$ , define-se **densidade de carga eléctrica**, e representa-se por  $\rho$ , por meio da expressão

$$\rho = \frac{q}{V}$$

Quando a distribuição de carga não é homogénea, isto é, varia de ponto para ponto, a densidade de carga no ponto P,  $\rho(P)$ , é definida por

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (2.7)$$

em que  $dq$  representa a quantidade de carga existente no volume infinitesimal  $dV$  (do ponto de vista macroscópico a carga pode ser encarada como um fluido contínuo).

Muitas vezes a carga distribui-se sobre uma superfície, tendo então interesse definir **densidade superficial de carga**,  $\sigma(P)$ , por meio da expressão (não confundir com a condutividade eléctrica, que também utiliza o símbolo  $\sigma$ )

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (2.8)$$

em que  $dq$  representa a quantidade de carga existente na superfície infinitesimal  $dS$  que contém o ponto P.

Em alguns casos que interessa definir a **densidade linear de carga**,  $\lambda(P)$ :

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad (2.9)$$

em que  $dq$  representa a quantidade de carga existente na linha de comprimento infinitesimal  $d\ell$  que contém P.

Uma das formas de ter a percepção da distribuição espacial do campo eléctrico consiste em efectuar o traçado das **linhas do campo eléctrico**. Estas linhas obtêm-se do modo seguinte:

1. Em cada ponto do espaço a linha do campo eléctrico deverá ser tangente ao vector campo eléctrico;
2. O número de linhas que se traçam por unidade de volume, através de uma superfície a elas perpendicular, deve ser proporcional à intensidade do campo eléctrico nessa região.

As linhas do campo eléctrico produzido apenas por uma carga eléctrica pontual divergem radialmente da carga, até ao infinito, se esta for positiva, e dirigem-se do infinito para a carga, também radialmente, se esta for negativa.

Sempre que haja mais do que uma carga em jogo e a carga total seja nula, podem fixar-se as seguintes regras para o traçado das linhas do campo eléctrico:

1. As linhas devem ter início em cargas positivas e terminar em cargas negativas;
2. As linhas do campo não podem cruzar-se;
3. A densidade das linhas aumenta à medida que se aproximam das cargas.

Muitas vezes utilizam-se as simetrias da distribuição de cargas para auxiliar este traçado.

Convém chamar a atenção para o facto da lei de Coulomb não ser válida para valores de  $r$  inferiores aos raios dos núcleos atómicos, onde daria valores do campo de tal modo elevados que poriam em causa a estabilidade dos núcleos.

### 2.1.5. Movimento de uma partícula carregada num campo eléctrico

Uma partícula material de massa  $m$ , electrizada com a quantidade de electricidade  $q$ , colocada num campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , fica sujeita à força  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Mas pela 2ª lei de Newton, uma partícula sujeita a uma força adquire um movimento acelerado, de aceleração  $\mathbf{a}$ , tal que  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ . Combinando estas duas expressões obtêm-se

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad (2.10)$$

Se o campo eléctrico for uniforme, isto é, constante em direcção sentido e grandeza, a aceleração da partícula será constante. Se a partícula tiver carga positiva a aceleração terá a direcção do campo. Se a sua carga for negativa a aceleração será em sentido contrário ao campo.

## 2.2. Fluxo do Campo Eléctrico

### 2.2.1. Fluxo de um vector

As considerações desta secção são genéricas para qualquer campo (eléctrico, magnético, gravítico, etc.) e são válidas para vectores variáveis no tempo. Como caso particular são também válidas para vectores que não dependam da variável tempo.

Considere-se uma região do espaço em que existe um campo de vectores  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$  e nessa região uma superfície  $S$  de duas faces, finita. Seja  $d\sigma$  um elemento da superfície  $S$  na qual se encontra o ponto  $P$  e  $\mathbf{n}$  o vector unitário perpendicular a  $d\sigma$ , orientado da face negativa para a face positiva. Chama-se **fluxo elementar** do campo  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$  através do elemento de superfície  $d\sigma$  ao escalar

$$d\varphi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (2.11)$$

Chama-se **fluxo total** do campo através de toda a superfície  $S$  à soma integral de todos os fluxos elementares  $d\varphi$ :

$$\varphi = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (2.12)$$

É corrente usar na escrita o elemento de superfície vectorial  $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\sigma$ . Nestas condições a expressão do fluxo elementar será dada por  $d\varphi = \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  e a do fluxo total

$$\varphi = \int_S \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Num campo vectorial chamam-se **linhas do campo** às linhas que em cada ponto são tangentes, num determinado instante, ao vector do campo. Uma vez que num determinado ponto  $P(x,y,z)$  o vector  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$  é único (num instante bem determinado), por cada ponto do espaço passa uma e só uma linha do campo.

Considere-se um contorno fechado  $C$ , na região em que existe o campo. Chama-se **tubo de fluxo** à superfície definida pelas linhas do campo que se apoiam no contorno  $C$  (passam pelo contorno). Note-se que o tubo de fluxo é uma superfície, não o volume por ela delimitado. Nestas condições, o fluxo de um campo através da superfície de um qualquer seu tubo de fluxo, ou de parte dele, é nulo. Com efeito para a superfície de um tubo de fluxo  $\mathbf{v}$  é sempre perpendicular a  $\mathbf{n}$ , sendo a função integranda em (2.12) sempre nula.

### 2.2.2. Circulação de um vector

Considere-se de novo uma região do espaço em que existe um campo de vectores  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ . Nessa região considere-se uma curva contínua, sem pontos múltiplos. Seja  $d\lambda$  um elemento da curva  $C$  na qual se encontra o ponto  $P$ , e seja  $\mathbf{t}$  o vector unitário tangente a  $d\lambda$ , orientado num determinado sentido. Chama-se **circulação elementar** do campo  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$  ao longo do elemento de curva  $d\lambda$ , ao escalar

$$d\gamma = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\lambda$$

Chama-se **circulação total** do campo ao longo de toda a curva  $C$  à soma integral de todas as circulações elementares  $d\gamma$ :

$$\gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\lambda \quad (2.13)$$

Faça-se agora a circulação de um campo ao longo de uma curva que liga os pontos A e B. O valor da circulação depende, no caso geral, do campo  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ , dos pontos A e B e do caminho entre eles. Há no entanto um caso, importante por aparecer em muitas aplicações, em que a circulação de  $\mathbf{v}$  não depende do caminho percorrido mas apenas dos pontos A e B. É o caso em que  $\mathbf{v}$  é o gradiente de um escalar  $V(\mathbf{P})$ :  $\mathbf{v} = \text{grad}(V)$ . Nestas condições  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$  é uma diferencial exacta das coordenadas, ficando a expressão (2.13) reduzida apenas a

$$\gamma = \int_{AB} \text{grad}V \cdot \mathbf{t} d\lambda = \int_A^B dV = V_B - V_A \quad (2.14)$$

Diz-se neste caso, que o campo  $\mathbf{v}$  (vectorial) **deriva de um potencial**  $V$  (escalar), ou que é um **campo conservativo**. Mais adiante o potencial será representado pela letra  $U$ .

### 2.2.3. Teorema de Stokes

Considere-se numa região do espaço simplesmente conexa<sup>(7)</sup> um campo vectorial  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ , uniforme, contínuo e derivável. Seja  $C$  uma curva fechada, contínua e sem pontos múltiplos e considere-se uma calote de superfície  $S$ , com duas faces, limitada por  $C$ . O teorema de Stokes<sup>8</sup> afirma o seguinte:

***A circulação do vector  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$  ao longo de  $C$  é igual ao fluxo do seu rotacional através de  $S$ .***

Analiticamente, representando por  $\mathbf{n}$  o vector unitário normal exterior à superfície e por  $\mathbf{t}$  o vector unitário tangente à curva (de acordo com a “regra do saca rolhas”), será:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\lambda = \int_S (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (2.15)$$

Se o campo for conservativo o 2º membro de (2.15) anula-se, uma vez que  $\text{rot}(\text{grad}(V))$  é identicamente nulo, qualquer que seja o escalar  $V$ . Nestas condições,

***Em todo o campo que derive de um potencial<sup>(9)</sup> é nula a sua circulação ao longo de uma curva contínua fechada e sem pontos múltiplos,  $C$ .***

Este teorema e de importância fundamental em electrotecnia, como se verá adiante.

### 2.2.4. Fluxo do Campo Eléctrico e lei de Gauss

Considere-se uma região do espaço em que existe um campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Este campo dependerá do ponto  $\mathbf{P}$ , ou, se forem utilizadas coordenadas cartesianas, de  $x, y, z$ . Seja  $S$  uma superfície (de aqui em diante será suposta de duas faces e finita), e seja  $d\sigma$  um elemento da superfície  $S$ . A simbologia, será análoga à das secções anteriores.

Atendendo à definição dada pela expressão (2.12), o **fluxo do campo eléctrico**  $\mathbf{E}$  através da superfície  $S$  será dado por:

<sup>7</sup> Uma região diz-se **simplesmente conexa** se dados dois pontos A e B quaisquer e dois caminhos de A para B, quaisquer, os caminhos se podem reduzir um ao outro por uma deformação contínua de um deles, sem sair da região. O interior de um elipsóide é simplesmente conexo, o interior de um toro já não o é.

<sup>8</sup> George Gabriel Stokes, matemático e físico irlandês, 1819-1903.

<sup>9</sup> Desde que obedeça às condições de validade do teorema de Stokes.

$$\varphi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (2.16)$$

Considere-se agora uma superfície  $S$  fechada, finita, com uma forma arbitrária, no interior da qual existe uma distribuição de cargas eléctricas, contínua ou discreta. Represente-se por  $Q$  a carga eléctrica total resultante, interior a  $S$ . A lei de Gauss<sup>(10)</sup> afirma o seguinte:

***O fluxo total do campo eléctrico através de uma superfície fechada, é proporcional à quantidade de carga eléctrica resultante, existente no interior dessa superfície.***

Analiticamente esta lei exprime-se do seguinte modo:

$$\varphi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon} Q \quad (2.17)$$

em que  $\varepsilon$  representa a permeabilidade eléctrica da região onde existe o campo e as cargas, suposta homogénea. O sinal de integral é representado com uma circunferência para indicar que se trata de uma superfície fechada.

A demonstração desta lei pode fazer-se a partir do cálculo do fluxo do campo eléctrico originado por uma carga pontual  $q$  localizada no centro de uma esfera de raio  $r$ . O campo eléctrico produzido por esta carga, é, de acordo com a lei de Coulomb, radial e de módulo  $\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2}$ . Substituindo este valor no termo contendo o integral em (2.17), notando que  $\mathbf{E}$  sendo radial tem o sentido da normal à superfície, e ainda que  $S = 4\pi r^2$ , vem

$$\varphi_E = \oint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} d\sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \oint_S d\sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} S = \frac{q}{\varepsilon}$$

A generalização deste resultado a uma superfície arbitrária fechada  $S$  (designada ***superfície gaussiana***) contendo a carga  $Q$  pode ser feita de várias formas. Uma delas consiste em considerar uma superfície esférica qualquer interior a  $S$  e uma outra superfície esférica qualquer exterior a  $S$ . O fluxo do campo eléctrico através destas superfícies esféricas é o mesmo, uma vez que é independente do raio da esfera, e portanto também será igual ao fluxo através de  $S$ . A generalização para uma distribuição de cargas interior a  $S$  é, deste modo, imediata.

Como consequência da lei de Gauss, pode afirmar-se que ***o fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada é nulo se no seu interior não existirem cargas eléctricas.***

Unidades do fluxo eléctrico no SI:

Como se viu atrás o campo eléctrico exprime-se em  $\text{Vm}^{-1}$  (volt/metro). Atendendo à definição de fluxo (2.16) conclui-se que este se exprime em  $\text{Vm}$  (volt.metro). A lei de Gauss permite concluir que o ***fluxo eléctrico*** (forma abreviada de fluxo do campo eléctrico) se pode exprimir em  $\text{Nm}^2\text{C}^{-1}$ .

<sup>10</sup> Karl Friedrich Gauss, Astrónomo e Matemático alemão, 1777-1855.

### 2.2.5. Condutores em equilíbrio electrostático

Disse-se atrás que um meio material é condutor se contiver cargas eléctricas que se possam mover livremente. O condutor diz-se em **equilíbrio electrostático** se as cargas livres não se encontrarem em movimento (pelo menos em valor médio). Um condutor em equilíbrio electrostático goza das seguintes propriedades:

1. O campo eléctrico no seu interior é nulo;
2. A carga eléctrica existente num condutor distribui-se pela sua superfície;
3. O campo eléctrico à superfície de um condutor é, em cada ponto, perpendicular à superfície desse condutor e tem o valor  $\sigma / \varepsilon$  (densidade superficial de carga / permeabilidade eléctrica);

Estas propriedades podem ser obtidas com relativa facilidade:

1. Se o campo eléctrico no interior não fosse nulo, haveria movimento de cargas, o que contrariava a hipótese do condutor se encontrar em equilíbrio electrostático. Logo, o campo tem que ser nulo no interior do condutor em equilíbrio electrostático.
2. Se houvesse cargas no interior do condutor, a aplicação da lei de Gauss indicaria a presença de um campo eléctrico diferente de zero. Como o campo é nulo, segue-se, ainda pela lei de Gauss, que a carga também o será.
3. Se o campo eléctrico à superfície do condutor tivesse uma componente tangencial, esta faria as cargas deslocarem-se sobre a superfície, o que contraria a hipótese do condutor se encontrar em equilíbrio electrostático. Portanto, o campo eléctrico não tem componente tangencial à superfície do condutor, sendo normal a esta. Considerando um cilindro de base elementar  $dA$ , com o eixo perpendicular à superfície do condutor, colocado metade fora e metade dentro do condutor, a aplicação da lei de Gauss a este cilindro conduz a  $E dA = dq_i / \varepsilon$ , uma vez que só existe fluxo através de  $dA$ . Mas as cargas interiores a este cilindro  $dq_i$ , são dadas por  $dq_i = \sigma dA$ , e portanto  $E = \sigma / \varepsilon$ .

### 2.2.6. Ângulo sólido e lei de Gauss

Considere-se uma superfície esférica de raio  $r$  e sobre ela um elemento de área infinitesimal  $dA$ .

O **ângulo sólido** associado a  $dA$  é, por definição,

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} \quad (2.18)$$

O ângulo sólido é uma grandeza adimensional; exprime-se, no SI, em Sr (esterradianos). O ângulo sólido correspondente a uma esfera é igual a  $4\pi$ .

Considere-se uma carga eléctrica pontual  $q$  localizada no ponto O e uma superfície arbitrária S, fechada, contendo a carga (superfície de Gauss). Vai calcular-se o fluxo do campo eléctrico através de S. Para o efeito considere-se um ponto P sobre a superfície e um elemento infinitesimal de área,  $dS$ , contendo P. Imagine-se agora uma esfera com centro na carga eléctrica e raio  $r = |P-O|$ . O fluxo elementar do campo eléctrico através de  $dS$  é dado por  $d\phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$ , sendo  $\mathbf{n}$  o vector unitário normal a  $dS$ . Mas como  $\mathbf{E}$  é radial, este valor é igual a  $E dA$ , em que  $dA$  é a projecção de  $dS$  sobre a circunferência de

raio  $r$ . O fluxo total de  $\mathbf{E}$  através da superfície de Gauss  $S$  será, atendendo à lei de lomb, dado por

$$\varphi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_A \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon} \oint_A \frac{dA}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \oint_A d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon} \Omega$$

em que  $\Omega$  é o ângulo sólido de uma esfera, e portanto de valor  $4\pi$ . Substituindo o seu valor na equação acima esta fica

$$\varphi_E = \frac{q}{\epsilon}$$

Uma vez que a carga se encontra localizada numa posição arbitrária no interior de  $S$ , podem aí colocar-se quaisquer distribuições de cargas, contínuas ou discretas, de valor global  $Q$ , resultando assim a lei de Gauss (2.17).

## 2.3. Potencial Eléctrico e Capacidade

### 2.3.1. Energia potencial

Numa região do espaço em que existe um campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , considere-se uma carga de teste  $q_0$ . Esta fica sujeita a uma força  $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ . Calcule-se o trabalho realizado por esta força ao transportar a carga de teste de um ponto A para um ponto B. Será dado, por definição de trabalho, por

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.19)$$

Uma vez que este trabalho é realizado pelo campo, ele corresponderá a uma diminuição da *energia potencial do campo*,  $\Delta E_P$ , ou seja,  $\Delta E_{P\widehat{AB}} = -W_{\widehat{AB}}$ , pelo que será

$$\Delta E_{P\widehat{AB}} = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

O valor deste integral é independente do percurso entre A e B, uma vez que *o campo eléctrico é conservativo*.

### 2.3.2. Diferença de potencial

Chama-se *diferença de potencial* entre os pontos A e B ao trabalho que uma força exterior tem que realizar para transportar uma carga de prova **unitária** entre os pontos A e B, contra as forças do campo. Será assim

$$U_{AB} = \frac{\Delta E_{P\widehat{AB}}}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

### 2.3.3. Potencial devido a uma carga

*Define-se **potencial no ponto P**,  $U_P$ , como sendo o trabalho necessário para, no interior de um campo eléctrico, transportar a carga de prova unitária desde o infinito até a esse ponto.*

Utilizando a definição anterior vem

$$U_P = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.20)$$

No Sistema Internacional de unidades a diferença de potencial e o potencial exprimem-se em V (volt). Entre 2 pontos, num campo eléctrico, existe uma diferença de potencial de 1 V se for necessário o trabalho de 1 J para deslocar, de um ponto para o outro, uma carga eléctrica de 1 C. A observação da expressão (2.20) justifica o facto, mencionado em 2.1.3, de o campo eléctrico se exprimir em volt/metro.

Numa região em que o campo eléctrico seja uniforme, a diferença de potencial entre dois pontos à distância  $d$  um do outro é dada por

$$U_{AB} = U_B - U_A = -E d \cos \theta$$

em que  $\theta$  é o ângulo formado pela recta que une os pontos A e B e as linhas do campo. Se a recta que contém A e B for paralela às linhas do campo será simplesmente

$$U_B - U_A = -E d$$

Se a recta anterior for perpendicular às linhas do campo será  $U_B - U_A = 0$ . Diz-se que os pontos A e B se encontram sobre uma equipotencial.

De um modo geral chama-se **equipotencial** ao conjunto de pontos que se encontram ao mesmo potencial. Este conjunto de pontos constitui uma superfície que é, em cada ponto, perpendicular às linhas do campo eléctrico.

Utilize-se a expressão (2.20) para calcular o potencial devido a uma carga eléctrica  $q$ , à distância  $R$ . Substituindo nela o campo dado pela lei de Coulomb, obtém-se, uma vez que o percurso de integração radial é paralelo às linhas do campo,

$$U_P = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\infty}^R \frac{k_e q}{r^2} dr = k_e q \left[ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^R = \frac{k_e q}{R}$$

Verifica-se que o potencial decresce com o inverso da distância e se anula no infinito. De um modo geral é também nulo o potencial eléctrico a uma distância infinita de uma distribuição qualquer de cargas.

Utilizando ainda a expressão (2.20), e a lei de Coulomb, pode concluir-se que a diferença de potencial devido a uma carga eléctrica  $q$ , entre dois pontos às distâncias  $r_1$  e  $r_2$  é dada por

$$U_1 - U_2 = k_e q \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

#### 2.3.4. Potencial devido a uma distribuição de cargas

O potencial num ponto P, devido a uma distribuição discreta de  $N$  cargas  $q_i$ , será dado pela soma dos potenciais devidos a cada uma das cargas:

$$U_P = k_e \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \quad (2.21)$$

em que  $r_i$  representa a distância de cada carga ao ponto P. Repare-se que esta soma é algébrica, uma vez que o potencial é um escalar.

Se em vez de uma distribuição de cargas discreta esta for contínua, representando por  $dq$  a carga eléctrica existente no elemento de volume  $dV$ , será

$$U_P = \int_V \frac{dq}{r} = \int_V \frac{\rho}{r} dV \quad (2.22)$$

em que  $\rho$  representa a densidade volumétrica de carga e poderá variar de ponto para ponto.

### 2.3.5. Capacidade e condensadores

Considere-se o conjunto formado por dois condutores separados por um isolante. Admita-se que num dos condutores se encontra distribuída a carga eléctrica  $+Q$ , e que no outro condutor se encontra a carga  $-Q$ . Com esta hipótese as linhas do campo eléctrico têm origem todas no condutor carregado positivamente e terminam todas no condutor negativo. Estabelece-se assim entre os dois condutores uma diferença de potencial  $\Delta U \equiv U_{12} \equiv U$ .

Ao sistema assim constituído dá-se o nome de *condensador eléctrico*, e os condutores que o constituem têm o nome de *armaduras* ou *eléctrodos* do condensador.

O problema que se põe agora é determinar a relação existente entre a carga  $Q$  e a diferença de potencial  $U$ . A experiência mostra que existe uma relação de proporcionalidade entre a carga existente numa das, designando-se a constante de proporcionalidade por *capacidade do condensador*:

*Capacidade de um condensador é, por definição, a relação que se estabelece entre o valor absoluto da carga eléctrica numa das suas armaduras e o valor absoluto da diferença de potencial entre elas.*

De acordo com esta definição pode escrever-se

$$C = \frac{Q}{U} \quad (2.23)$$

A capacidade de um condensador depende da sua geometria e do valor da permeabilidade eléctrica do seu dieléctrico. A maior parte dos condensadores usados na prática podem ser classificados com *condensadores planos*; estes são constituídos por duas armaduras planas, de área  $A$  cada uma, a uma distância  $d$  muito inferior à menor das dimensões da superfície das armaduras. O espaço entre as armadura é preenchido com um dieléctrico de permeabilidade eléctrica  $\varepsilon$ . Nestas condições prova-se, a partir da expressão (2.23) e com o auxílio da lei de Gauss e da expressão da diferença de potencial entre dois eléctrodos planos (ver Probl. 2.28) que a capacidade do condensador é dada por

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \quad (2.24)$$

Citam-se a seguir alguns dos condensadores mais usados na prática e algumas das suas características principais:

tipo de condensador	dieléctrico	armaduras	ddp máxima (V)	Capacidades
variável	ar, vácuo ou gás	metálicas, rígidas	10 000	
cond. de papel	papel encerado	filme metálico	400	4,7 nF – 10 μF
cond. de mica	mica	filme metálico	2 500	1pF – 100 nF
cond. cerâmico	vidro ou cerâmica	metal ou filme metálico	500	10pF – 100 nF
cond. de tântalo	óxidos de tântalo	filme metálico	100	4,7 nF – 470 μF
cond. electrolítico	óxidos metálicos	metal ou filme metálico	100	4,7 nF – 10 mF

Embora muitos dos condensadores apresentados tenham aparentemente a forma cilíndrica, isto resulta de, para efeitos de compactação, protecção e manuseamento o conjunto armaduras + dieléctrico ter sido dobrado e enrolado.

Um outro tipo de condensador muito vulgar é o cabo coaxial. Embora a finalidade do cabo coaxial seja a de transportar sinais eléctricos, pela sua constituição forma um condensador cilíndrico, em que uma das armaduras é constituída pelo condutor interior, a outra pelo condutor exterior, de protecção, sendo o dieléctrico a substância que separa estes condutores. Seguindo um raciocínio análogo ao utilizado para o condensador plano prova-se que a sua capacidade é dada por

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}}\right)} \quad (2.25)$$

em que  $\ell$  representa o comprimento do condensador e  $R_{\text{ext}}/R_{\text{int}}$  os diâmetros exterior/interior das armaduras.

Um outro condensador importante é a linha bifilar, constituída por dois condutores de secção recta com raios  $R_1$  e  $R_2$  e centros separados de  $D$ , num meio de permeabilidade  $\epsilon$ . Para este condensador a capacidade é dada por

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{D^2}{R_1R_2}\right)} \quad (2.26)$$

Finalmente o condensador esférico, constituído por duas esferas concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$ , com  $R_2 > R_1$ , com um meio de permeabilidade  $\epsilon$  entre elas, é dada por

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad (2.27)$$

Os condensadores podem ser associados em série ou em paralelo. Supondo que existem  $N$  condensadores, de capacidades  $C_i$ , a capacidade resultante da associação é

Associação em paralelo: 
$$C = \sum_{i=1}^N C_i \quad (2.28)$$

Associação em série: 
$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (2.29)$$

Um condensador, uma vez que tem carga eléctrica, tem energia acumulada. Para calcular esta energia admita-se que o condensador tem uma carga  $q$ , e se encontra a uma diferença de potencial  $U$ . Se agora se fornecer ao condensador uma carga elementar  $dq$ , o trabalho necessário para o fazer será dado por  $dW = V dq = \frac{q}{C} dq$ . A energia acumulada no condensador será o trabalho necessário para elevar a carga do condensador desde 0 até  $Q$ :

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Esta expressão pode escrever-se dos modos seguintes:

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.30)$$

Para um condensador plano o campo eléctrico no seu dieléctrico é dado por  $E=U/d$ . Substituindo o valor de  $U$  em (2.30) e entrando com a expressão da capacidade do condensador plano (2.24) obtém-se para a expressão da energia eléctrica por unidade de volume

$$w_E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (2.31)$$

## 2.4. Condutores e corrente eléctrica

### 2.4.1. Corrente eléctrica

Num condutor as cargas eléctricas podem movimentar-se com mais ou menos facilidade, dependendo esta do material em si e de outros factores, como por exemplo a temperatura. Num metal as cargas eléctricas livres são negativas, os electrões de valência. Para descrever a forma como as cargas se movimentam são utilizados os conceitos de corrente eléctrica e densidade de corrente eléctrica.

Define-se *corrente eléctrica* instantânea através de uma superfície de área  $A$  pela expressão

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2.32)$$

A corrente eléctrica é também designada por *corrente*, *intensidade de corrente eléctrica* ou *intensidade*. A expressão (2.32) mostra que a corrente representa o fluxo de cargas eléctricas na unidade de tempo, através de  $A$ . A corrente positiva representa um fluxo de

cargas positivas por unidade de tempo; assim, num metal, a corrente tem o sentido trário ao do movimento dos electrões.

A unidade de corrente do SI é o *ampere*<sup>(11)</sup> (A). O ampere representa a passagem, através de A, de uma carga de 1 C durante 1 s.

Representando por  $n$  o número de portadores de carga por unidade de volume, por  $q$  a carga de cada portador, por  $v_d$  a velocidade média de cada portador (velocidade de deriva) e por  $A$  a secção recta através da qual passam as cargas, no volume elementar  $dV=Adx$  há a carga elementar  $dQ = n q dV = n q A dx$ . As cargas em movimento percorrem o espaço  $dx$  num intervalo de tempo  $dt$  tal que  $dx = v_d dt$ , pelo que se obtém  $dQ = n q v_d A dt$ , sendo a corrente

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = nqv_d(t)A \quad (2.33)$$

Note-se que no interior de um condutor as cargas livres se movem aos ziguezagues, devido às colisões com os átomos do condutor. A corrente é devida ao valor médio da velocidade das cargas.

Ao definir-se a corrente eléctrica falou-se na área através da qual se movimentam as cargas. Interessa agora definir a densidade de corrente eléctrica. Será a corrente que passa por unidade de área, e representa-se por  $J$ :

$$J = \frac{I}{A}$$

Através de uma área infinitesimal  $dA$ , em torno de um ponto P, define-se o vector **densidade de corrente** pela expressão

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{dA} \mathbf{n} \quad (2.34)$$

em que  $\mathbf{n}$  representa o vector unitário normal à superfície  $dA$ , orientado com o sentido da corrente  $I$ .

#### 2.4.2. Lei de ohm

Num condutor as cargas eléctricas movimentam-se por se encontrarem sujeitas a forças. Num condutor onde exista um campo eléctrico, as forças aplicadas às cargas são devidas a este campo, indo pois estabelecer-se uma corrente eléctrica, com a respectiva densidade de corrente associada. A experiência revela que entre o campo eléctrico aplicado,  $\mathbf{E}$ , e a densidade de corrente resultante,  $\mathbf{J}$ , existe uma relação de proporcionalidade dada pela chamada **lei de ohm**:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.35)$$

O parâmetro  $\sigma$  designa-se por **condutividade** eléctrica do material e é um escalar: a densidade de corrente tem a direcção e sentido do campo.

A lei de ohm é válida para os metais e soluções químicas. Há no entanto materiais para os quais ela não se verifica, por exemplo os materiais semicondutores. Mesmo nos metais a lei não se aplica a determinadas temperaturas muito baixas.

---

<sup>11</sup> André-Marie Ampère, físico, filósofo, cientista e matemático francês 1775-1836.

Há ainda casos de materiais anisótipos em que a condutividade é uma matriz, deixando o vector  $\mathbf{J}$  de ter o sentido do campo eléctrico.

À grandeza inversa da condutividade dá-se o nome de **resistividade** eléctrica:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (2.36)$$

Considere-se agora o caso particular de um condutor de secção recta  $A$  e comprimento  $\ell$ . Ao ligarem-se os seus extremos a uma fonte de tensão com uma diferença de potencial  $U$ , o campo eléctrico que se estabelece no condutor será, em módulo,  $E=U/\ell$ . Pela lei de ohm estabelece-se no condutor uma densidade de corrente tal que  $J = \sigma E = \sigma U/\ell$ .

Mas como  $J = I/A$ , fica  $I = \frac{A}{\ell} \sigma U$ , ou ainda, entrando com a definição (2.36),

$$U = RI \quad (2.37)$$

em que

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (2.38)$$

A resistividade dos materiais depende da temperatura. Este facto é largamente utilizado em instrumentação de medida na construção das termo-resistências.

### 2.4.3. Energia e potência

Considere-se uma resistência ligada a uma fonte de energia eléctrica que mantenha aos seus terminais uma diferença de potencial  $U$ . Pela lei de ohm a resistência irá ser percorrida por uma corrente  $I$ . Haverá assim um movimento de cargas eléctricas na resistência. O trabalho necessário para transportar a carga  $+q$  na resistência será dado por (2.19).

Mas como  $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = U$ , fica  $W_{AB} = qU$ . Dividindo ambos os membros desta expressão pelo tempo, fica-se no primeiro membro com a potência fornecida pela fonte à resistência, e no segundo com o produto da corrente pela tensão, pelo que a expressão da potência entregue pela fonte à resistência será dada por

$$P = UI \quad (2.39)$$

Entrando com a lei de ohm (2.37), pode ainda escrever-se

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad (2.40)$$

As resistências podem ser associadas em série ou em paralelo. Supondo que existem  $N$  resistências, de valor  $R_i$ , a resistência resultante da associação é (ver problemas)

Associação em série: 
$$R = \sum_{i=1}^N R_i \quad (2.41)$$

Associação em paralelo: 
$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad (2.42)$$

### 2.4.4. Leis de Kirchhoff

Ao efectuar o estudo de circuitos contendo elementos individualizados, tais como resistências, condensadores ou outros, também designados por circuitos de parâmetros concentrados, é fundamental a utilização das leis de Kirchhoff, a lei dos nós e a lei das malhas. Para o efeito divide-se o circuito em malhas, de modo a haver sempre pelo menos um ramo diferente em cada malha. Às junções dos ramos dá-se o nome de nós. Em vez do nó pode considerar-se uma superfície fechada de onde entram ou saem as correntes.

Para cada nó e para cada malha são válidas as seguintes leis:

#### 2.4.4.1. Lei dos nós

Em qualquer nó de um circuito, a soma algébrica das correntes eléctricas é nula:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (2.43)$$

Para efectuar a aplicação desta lei deverá previamente atribuir-se um sentido às correntes, por exemplo, a corrente será positiva se for a entrar no nó e negativa se for a sair.

Numa rede há tantas equações do tipo (2.43) quantos os nós.

No entanto nem todas são distintas. Se houver  $n$  nós apenas  $n-1$  equações são independentes.

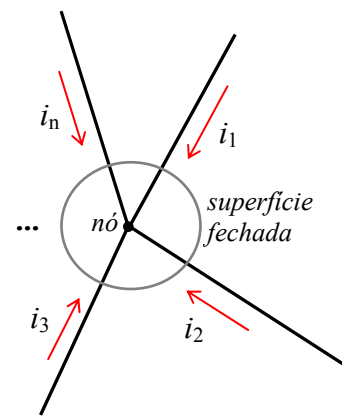


Fig. 2.1 – Lei dos nós

#### 2.4.4.2. Lei das malhas

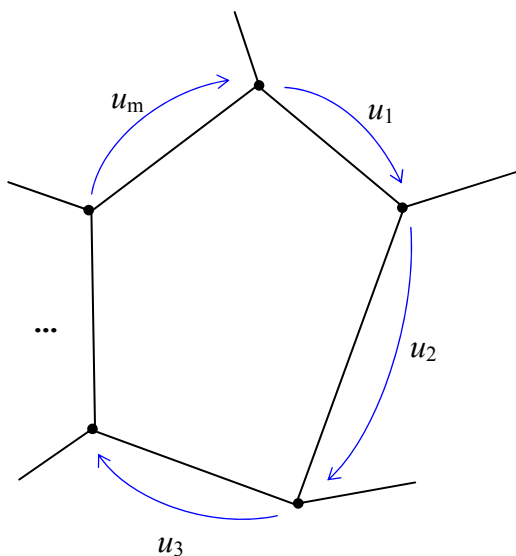


Fig. 2.2 – Lei das malhas

Em qualquer malha de um circuito, a soma algébrica das tensões eléctricas é nula.

Como para a lei anterior, para efectuar a aplicação desta lei deverá previamente atribuir-se um sentido às tensões.

$$\sum_{k=1}^m u_k = 0 \quad (2.44)$$

Há também tantas equações quantas as malhas que se considerarem. Como anteriormente, nem todas as malhas são distintas. Numa rede com  $n$  nós e  $m$  ramos, o nº de malhas independentes é

$$v = m - n + 1$$

O número total de equações independentes é também igual a este.

## 2.5. Campo magnético.

### 2.5.1. Introdução

Presume-se que a primeira utilização prática do magnetismo tenha sido num instrumento de medida, a bússola, da qual já há referências ao uso, na China, no século 13 AC. Bastante mais tarde, cerca de 800 anos A.C., os Gregos fazem referência ao facto de um mineral, a magnetite, atrair pequenos pedaços de ferro.

Tal como acontece com a agulha magnética da bússola, na magnetite e nos imãs artificiais, detectam-se duas regiões com características opostas, uma que é atraída pelo pólo norte da Terra e outra que é atraída pelo pólo sul. A essas regiões dá-se o nome de *norte* e *sul* da agulha (ou da magnetite), respectivamente ou também, pólo + e pólo – .

Um facto que chamou a atenção dos investigadores foi o de não se conseguir separar os dois pólos de um imã: se um determinado imã for cortado em dois, o resultado são dois imãs mais pequenos, continuando cada um deles a ter um pólo norte e um pólo sul. Constatou-se ainda que estando dois imãs em presença, os pólos do mesmo sinal se repelem e os pólos de sinais contrários se atraem. A Terra comporta-se como um imã gigante, com o pólo sul magnético ou pólo – localizado próximo do norte geográfico e o pólo norte magnético ou pólo + localizado próximo do pólo sul geográfico.

Uma vez que um imã produz uma força que pode ser detectada numa determinada região do espaço, pode falar-se da existência de um *campo magnético*. Este pode ser detectado com o auxílio de uma agulha magnética, que se orientará segundo a direcção do campo. A intensidade poderá ser detectada pelo binário exercido sobre uma agulha magnética de valor conhecido que se encontre perpendicular às linhas do campo. O campo magnético é designado por **B**.

Oersted<sup>(12)</sup> descobriu que uma corrente eléctrica também faz deflectir uma agulha magnética, originando assim um campo magnético. Esta descoberta foi aproveitada quase logo a seguir por outros cientistas para estabelecer as bases do electromagnetismo.

### 2.5.2. Força exercida sobre a carga eléctrica

Uma das propriedades importantes do campo magnético é que ele *exerce uma força sobre uma carga eléctrica que se encontre em movimento*. Designando por **B** o vector campo magnético, se uma carga eléctrica  $q$  se encontrar em movimento, no campo, com uma velocidade  $\mathbf{v}$ , a experiência mostra que a carga fica sujeita a uma força  $\mathbf{F}_B$  tal que:

- 1º – O módulo da força é proporcional à carga; o seu sentido depende do sinal da carga.
- 2º – O módulo da força é proporcional ao módulo da velocidade da carga; o seu sentido depende do sentido da velocidade.
- 3º – O módulo da força é proporcional ao módulo do campo; o seu sentido depende do sentido do campo.
- 4º – Se a direcção da velocidade for paralela à direcção do campo, a força é nula; se a velocidade e o campo formarem um ângulo  $\theta$ , a força é proporcional a  $\sin\theta$ .
- 5º – A força é perpendicular ao plano formado por  $\mathbf{v}$  e **B**, de tal modo que  $\mathbf{v}$ , **B** e  $\mathbf{F}_B$  formam um triedro directo.

<sup>12</sup> Hans Christian Oersted, Físico dinamarquês, 1777-1851.

As observações anteriores podem resumir-se à expressão

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.45)$$

em que o sinal  $\times$  representa o produto externo dos vectores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ .

No sistema internacional de unidades o campo magnético exprime-se em *tesla* ( T ). O tesla corresponde, tomando em consideração a equação (2.45) a

$$1 \text{ T} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ C.m/s}}, \text{ ou ainda, } 1 \text{ T} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ A.m}}$$

### 2.5.3. Força exercida sobre a corrente eléctrica

Uma vez que a corrente eléctrica é o resultado do movimento das cargas eléctricas, é de esperar que sobre um condutor que transporte uma corrente eléctrica, se exerça uma força, se esse condutor se encontrar convenientemente colocado num campo magnético.

Viu-se atrás, que se for  $n$  o número de portadores de carga por unidade de volume do condutor,  $q$  a carga de cada portador,  $v_d$  a velocidade de deriva de cada portador e  $A$  a secção recta do condutor através da qual passam as cargas, se tem  $I = nqv_d A$ . A força exercida pelo campo sobre cada portador é dada por  $\mathbf{f} = q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ . A força exercida sobre todos os portadores contidos no comprimento elementar  $ds$  do condutor de secção  $A$  será dada por  $d\mathbf{F} = nA ds q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ . Considerando o vector  $ds$  com o sentido de  $\mathbf{v}_d$  e módulo  $ds$ , substituindo  $nqv_d A$  por  $I$  a expressão da força exercida pelo campo sobre o elemento de condutor de secção  $A$  e comprimento  $ds$  fica

$$d\mathbf{F}_B = I ds \times \mathbf{B} \quad (2.46)$$

Se o condutor formar um troço  $\widehat{AB}$ , a força total sobre ele exercida será

$$\mathbf{F}_B = I \int_{\widehat{AB}} ds \times \mathbf{B} \quad (2.47)$$

### 2.5.4. Movimento de uma partícula num campo magnético

Considere-se uma partícula material de massa  $m$  e carga eléctrica  $q$  em movimento num campo magnético. De acordo com a 2ª lei de Newton, a partícula adquire uma aceleração igual à resultante das forças exteriores sobre ela aplicadas a dividir pela sua massa. Aplique-se ao caso simples de uma partícula de carga positiva  $q$ , lançada com uma velocidade  $\mathbf{v}$  perpendicularmente a um campo  $\mathbf{B}$  uniforme. A única força exterior a actuar sobre a partícula é a força magnética, cujo módulo é dado por  $F_B = qvB$ . Pela lei de Newton será então  $qvB = ma$ . O módulo da aceleração é constante, uma vez que  $\mathbf{B}$  é uniforme. No entanto a sua direcção vai sempre variando, uma vez que a força  $\mathbf{F}_B$  está sempre apontada para o centro de uma circunferência de raio  $r$ . Nestas condições a aceleração da partícula é centrípeta, pelo que pode ser expressa por  $a = v^2/r$ . Substituindo o valor de  $a$  na expressão anterior fica

$$qvB = \frac{mv^2}{r}, \text{ donde } r = \frac{mv}{qB}$$

A partícula descreve um movimento circular. A sua frequência angular é dada por  $\omega = v/r$ , ou

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (2.48)$$

### 2.5.5. O efeito de Hall

O efeito de Hall é o resultado da acção de um campo magnético sobre cargas eléctricas em movimento no interior de um condutor. Seja um condutor, por simplicidade de exposição de secção rectangular e colocado num campo magnético, como indicado na figura. O condutor é percorrido por uma corrente eléctrica, imposta do exterior.

Uma vez que as cargas se encontram sujeitas à força  $\mathbf{F}_B$ , irão deslocar-se para a parte superior do condutor. No entanto, a concentração de cargas positivas na face superior (e negativas na inferior), origina um campo eléctrico  $\mathbf{E}_H$ , com a direcção do eixo dos  $zz$ , de sentido contrário a  $\mathbf{F}_B$ . A este campo eléctrico corresponderá uma diferença de potencial  $U_H$  entre as faces superior e inferior do condutor,  $U_H = E_H d$ .

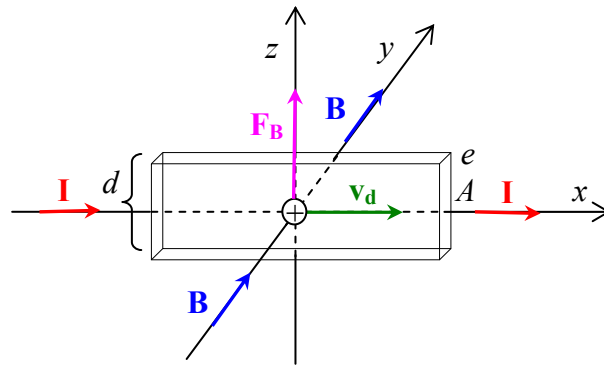


Fig. 2.3 – Efeito de Hall

No equilíbrio será  $qv_d B = qE$ , pelo que fica,  $V_H = v_d B d$ . Mas viu-se atrás que  $v_d = I/nqA$ , pelo que se pode escrever, representando por  $e$  a espessura do condutor,

$$V_H = R_H \frac{IB}{e}, \text{ com } R_H = \frac{1}{nq} \quad (2.49)$$

A constante  $R_H$  designa-se por **coeficiente de Hall**; depende do material condutor.

Este dispositivo utiliza-se em instrumentação de medida para detectar a posição de peças e para medição de posições angulares.

### 2.5.6. A lei de Biot-Savart

A lei de Biot-Savart permite calcular, em qualquer ponto do espaço, o campo magnético originado por uma corrente eléctrica. Esta lei foi consequência dos trabalhos experimentais de dois físicos, J.B. Biot<sup>(13)</sup> e F. Savart<sup>(14)</sup>. Estes físicos, após vários trabalhos experimentais, concluíram que em espaço livre, a corrente  $I$  que circula num troço de condutor de comprimento elementar  $ds$  orientado no sentido da corrente, origina num ponto  $P$ , à distância  $\mathbf{r}$  de  $ds$ , um campo magnético  $d\mathbf{B}$  dado por

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I ds \times \mathbf{r}_1}{r^2} \quad (2.50)$$

<sup>13</sup> Jean Baptiste Biot, físico francês, 1774-1862.

<sup>14</sup> Félix Savart, físico francês, 1791-1841.

$\mu_0$  é uma constante designada por **permeabilidade magnética do espaço livre**. O seu valor é  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T.m/A}$ .  $\mathbf{r}_1$  representa o vector unitário dirigido de  $ds$  para o ponto P. O campo originado em P por todo o condutor  $\ell$  obtém-se simplesmente por integração da equação anterior, resultando

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\ell} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}_1}{r^2} \quad (2.51)$$

Note-se que para a aplicação desta lei não é necessária a existência de um suporte material para a corrente. Ela pode ser aplicada para calcular o campo magnético produzido por um feixe de electrões.

Reparem-se nas semelhanças e nas diferenças existentes entre a lei de Coulomb e a lei de Biot-Savart:

- 1ª Em qualquer das leis há uma atenuação do campo com o inverso do quadrado da distância. No entanto, enquanto para originar um campo eléctrico a carga pode estar estática, para originar um campo magnético a carga tem de estar em movimento.
- 2ª O campo eléctrico produzido por uma carga ser radial, enquanto que o campo magnético produzido por uma corrente é perpendicular ao plano definido pelo segmento por onde circula a corrente e pelo segmento representativo da distância de  $ds$  ao ponto de coordenadas P.
- 3ª Pode ter existência o campo eléctrico produzido por uma carga elementar, mas não poder existir o campo magnético produzido apenas por uma corrente existente num caminho elementar  $ds$ , uma vez que a corrente tem que ter continuidade, e portanto a equação (2.50) tem sempre que ser integrada.

### 2.5.7. Força magnética entre dois condutores paralelos

A determinação desta força é importante, porque entre outros factos constitui a base da definição da unidade de corrente eléctrica no SI.

Em primeiro lugar vai calcular-se o campo magnético originado por um condutor rectilíneo de comprimento  $\ell$ , à distância  $d$  do seu eixo.

Observe-se a figura e aplique-se a lei de Biot-Savart:  $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \text{sen}\theta dx$ .

Expressando  $x$  e  $r$  em função de  $\theta$  e  $d$  e integrando para todo o condutor, a que correspondem os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , obtém-se  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$ .

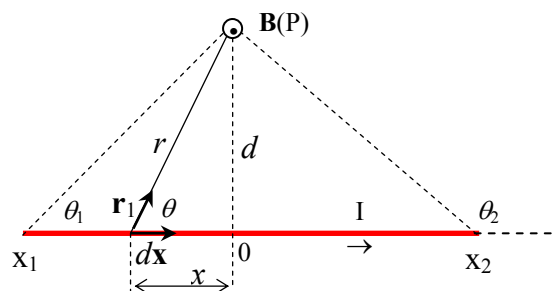


Fig. 2.4 – Força magnética entre condutores paralelos

Se o condutor for de comprimento infinito será  $\cos\theta_1 = 1$  e  $\cos\theta_2 = -1$ , ficando apenas

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (2.52)$$

Considerem-se dois condutores paralelos, de comprimento infinito, à distância  $d$  um do outro. Os condutores, 1 e 2, transportam as correntes  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente, e com o mesmo sentido. Um troço do condutor 1, de comprimento  $\ell$  e percorrido pela corrente  $I_1$ , fica submetido à força  $\mathbf{F}_1 = I_1 \ell \times \mathbf{B}_2$ . Mas como  $\ell$  é perpendicular a  $\mathbf{B}_2$ , fica  $F_1 = I_1 \ell B_2$ . Mas o campo  $B_2$  originado pelo condutor 2 é dado por (2.52), pelo que fica, para a força por unidade de comprimento

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (2.53)$$

A definição de ampere resulta imediatamente da equação acima (repare-se no valor de  $\mu_0$ ):

*Um ampere é a corrente eléctrica que circulando em dois condutores paralelos de comprimento infinito, à distância de um metro um do outro, origina, no vazio, uma força entre eles de  $2 \times 10^{-7}$  N por cada metro de comprimento.*

### 2.5.8. Lei de Ampere

Considere-se um circuito geométrico fechado,  $\ell$ , e uma superfície qualquer que se apoie nesse circuito. Admita-se que nesta região existe um campo magnético e há correntes eléctricas. A lei de Ampere afirma o seguinte:

*A circulação do campo magnético ao longo de qualquer circuito fechado é proporcional à resultante das correntes eléctricas que atravessam qualquer superfície que se apoie no circuito. A constante de proporcionalidade é a permeabilidade magnética do meio.*

Analicamente,

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \quad (2.54)$$

### 2.5.9. Lei de Gauss do campo magnético

Como se disse atrás, não é possível separar os pólos de um imã. Isto significa que as linhas do campo magnético são sempre fechadas sobre elas próprias, contrariamente ao que acontece com as linhas do campo eléctrico, que nascem em cargas positivas (ou então no infinito) e terminam em cargas negativa ou no infinito. É de esperar pois que haja diferenças entre as expressões do fluxo do campo eléctrico e do campo magnético. Considere-se uma região do espaço em que existe um campo magnético e nela uma superfície fechada qualquer. A lei de Gauss do campo magnético afirma o seguinte:

*O fluxo total do campo magnético através de uma superfície fechada é nulo.*

Analicamente,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (2.55)$$

### 2.5.10. Generalização da lei de Ampere

A lei de Ampere atrás apresentada é sempre válida quando a corrente eléctrica não varia no tempo. Se tal acontecer, poderá haver casos em que a lei não se verifique, a menos que seja completada com um novo termo, designado por corrente de deslocamento.

Seja o exemplo clássico de um condutor rectilíneo transportando uma corrente  $I$  variável no tempo, e um condensador inserido no circuito. Embora no circuito haja corrente, que transporta as cargas para ou das armaduras do condensador, entre as armaduras não há corrente eléctrica. Aplique-se a lei de Ampere, tomando um contorno circular perpendicular ao condutor, e considerem-se as superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , a primeira intersectando o condutor e a 2ª passando entre as armaduras do condensador. Para a 1ª superfície a lei diz que  $\oint \mathbf{B}.ds = \mu_0 I$  e para a 2ª  $\oint \mathbf{B}.ds = 0$ . Esta discrepância foi resolvida por Maxwell<sup>(15)</sup> com a introdução de um termo adicional, na lei de Ampere, chamado *corrente de deslocamento*, definida por

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (2.56)$$

Nestas condições a lei de Ampere, agora designada por lei de Ampere-Maxwell, escreve-se

$$\oint \mathbf{B}.ds = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (2.57)$$

Pode ver-se qual o significado deste 2º termo do 2º membro, no caso de se ter no circuito um condensador plano. Para ele será, sendo  $A$  a área das armaduras em presença e  $E$  o campo eléctrico entre elas,  $\phi_E = EA = Q/\epsilon_0$ . (A 2ª igualdade obtém-se pela aplicação da lei de Gauss do campo eléctrico). Neste caso a corrente de deslocamento será dada por  $I_d = dQ/dt$ , ou seja, como já se sabia, a corrente é dada pela variação da carga.

### 2.5.11. O magnetismo na matéria

O campo magnético no interior de um meio material é constituído por dois termos: um devido ao campo aplicado a partir do exterior do meio,  $\mathbf{B}_0$ , e outro devido ao magnetismo existente no próprio meio,  $\mathbf{B}_m$ . Este último termo é devido à soma dos momentos magnéticos orbitais e de spin dos átomos, podendo exprimir-se na forma  $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{M}$ . Introduzindo um novo campo, designado por *intensidade magnética*,  $\mathbf{H}$ , dado por  $\mathbf{H} = \mathbf{B}_0/\mu_0$ , pode escrever-se

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Acontece que para muitas substâncias (as substâncias paramagnéticas e as diamagnéticas) se tem  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ , ficando então

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.58)$$

em que

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \quad (2.59)$$

Chamam-se *paramagnéticas* as substâncias para as quais  $\chi > 0$ ; Para estas substâncias é  $\mu > \mu_0$ . Dizem-se *diamagnéticas* os materiais em que  $\chi < 0$ ; para eles  $\mu < \mu_0$ .

<sup>15</sup> James Clerk Maxwell, Físico escocês, 1831-1879.

Há um outro tipo de materiais, os materiais ferromagnéticos para os quais a relação (2.58) é a conhecida curva de histerese, não linear e com memória. Estas substâncias que exibem um  $\mu/\mu_0$  muito elevado, muitas vezes superior a 5000, são designadas por substâncias *ferromagnéticas*.

## 2.6. As equações de Maxwell

### 2.6.1. A lei da indução, de Faraday

Considere-se um circuito condutor fechado,  $\ell$ , e uma superfície,  $S$ , qualquer, que se apoie nesse circuito. É bem conhecido o facto de que se se provocar uma variação de fluxo magnético através de  $S$ , o circuito é percorrido por uma corrente eléctrica. A esta corrente dá-se o nome de corrente induzida. Ela é devida à força electromotriz induzida que se gera no circuito. Esta f.e.m. é, fisicamente, uma diferença de potencial. Ela existe porque a variação do fluxo magnético deu origem a um campo eléctrico na vizinhança do circuito condutor; a circulação deste campo eléctrico é a f.e.m. Pela lei de ohm, havendo um campo eléctrico num condutor, este irá ser percorrido por uma corrente.

O que acaba de se expor pode ser expresso pela lei da indução de Faraday:

***A força electromotriz induzida num circuito é proporcional à variação no tempo do fluxo magnético através de uma superfície que nele se apoie.***

Analicamente

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad (2.60)$$

Note-se que não se faz nenhuma referência ao facto que dá origem à variação do fluxo. Este poderá variar no tempo porque o circuito se movimenta no campo magnético, em particular por estar a rodar, como acontece nos alternadores, ou por ser originado por uma corrente eléctrica variável no tempo, como acontece nos transformadores. De qual modo, o que é importante na lei de Faraday, é que o fluxo deverá *variar no tempo*.

### 2.6.2. Lei de Lenz

A lei de Lenz não é mais do que a interpretação do sinal “-“ existente na lei da indução de Faraday:

***A polaridade da f.e.m. induzida é tal que a corrente correspondente origina um campo magnético que se vai opor à variação de fluxo que lhe deu origem.***

### 2.6.3. As equações de Maxwell na forma integral

As equações de Maxwell são as leis fundamentais do electromagnetismo. Foram apresentadas neste capítulo, embora não se tenha chamado a atenção para o nome. A primeira equação é a própria lei da indução (2.60), escrita de uma forma ligeiramente diferente, notando que a f.e.m. é a circulação de um campo eléctrico. A 2ª equação é a lei de Ampère-Maxwell (2.57). As duas restantes são as leis de Gauss do campo eléctrico e do campo magnético. Podem assim escrever-se as *equações de Maxwell do electromagnetismo*, na forma integral:

$$\oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad (2.61)$$

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (2.62)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (2.63)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (2.64)$$

#### 2.6.4. As equações de Maxwell na forma diferencial

As equações na forma diferencial são úteis quando se deseja estudar determinados aspectos do campo electromagnético, por exemplo o aspecto ondulatório. A passagem das equações acima, na forma integral, para as equações na forma diferencial, faz-se com recurso a dois teoremas importantes do cálculo: o teorema de Stokes e o teorema da divergência.

Comece-se em primeiro lugar por escrever as equações anteriores desenvolvendo as expressões do fluxo dos campos magnético e eléctrico e notando que a corrente é o fluxo de  $\mathbf{J}$  e a carga é o integral da densidade de carga  $\rho$ . As operações de derivação em ordem ao tempo e de integração no espaço podem comutar. As derivadas totais passam a derivadas parciais porque os fluxos dependem apenas do tempo, enquanto que os campos respectivos dependem do tempo e do espaço. Nestas condições será

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \end{array} \right. \quad (2.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_S (\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{A} \end{array} \right. \quad (2.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \end{array} \right. \quad (2.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Utilizando o teorema de Stokes pode modificar-se o primeiro membro das equações (2.65) e (2.66). Com o auxílio do teorema da divergência modificam-se os dois primeiros membros das equações (2.67) e (2.68). Finalmente, notando que  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  e  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  fica

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \\ \iint_S \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = \iint_S (\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{A} \\ \iiint_V \text{div } \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho dV \end{array} \right.$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = 0$$

Finalmente, notando que estas igualdades são válidas quaisquer que sejam as superfícies  $S$  e os volumes  $V$ , obtêm-se as equações de Maxwell na forma diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \end{array} \right. \quad (2.71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (2.72)$$

### 2.6.5. Ondas electromagnéticas

Considerando um meio sem cargas ( $\rho = 0$ ) e isolante ( $\sigma = 0, \Rightarrow J = 0$ ), e atendendo à identidade vectorial, válida para qualquer vector  $\mathbf{X}$ ,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{X})) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{X})) - \operatorname{lap}(\mathbf{X})$$

chega-se às seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{lap} \mathbf{E} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{lap} \mathbf{D} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{lap} \mathbf{B} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{lap} \mathbf{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.76)$$

Isto significa que os campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{H}$  se propagam sob a forma de ondas esféricas, com uma velocidade de propagação

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (2.77)$$

Se o meio de propagação for o vácuo tem-se  $\mu = \mu_0$  e  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , sendo nesse caso  $v = c$ , pelo que

$$\varepsilon_0\mu_0 = c^2 \quad (2.78)$$

### 2.6.6. O espectro das ondas electromagnéticas

É a seguinte a designação que se dá às ondas electromagnéticas consoante a sua frequência de oscilação:

<i>Designação</i>		<i>frequência</i>	<i>Comprimento de onda</i>
Ondas de rádio	Onda longa (LW) < 300kHz	$f < 300 \text{ kHz}$	$\lambda > 1000 \text{ m}$
	Onda média (MW) 300kHz - 3 MHz	$300 \text{ kHz} < f < 3 \text{ MHz}$	$1000 \text{ m} > \lambda > 100 \text{ m}$
	Onda curta (SW) 3 MHz – 30 MHz	$3 \text{ MHz} < f < 30 \text{ MHz}$	$100 \text{ m} > \lambda > 10 \text{ m}$
	VHF	$30 \text{ MHz} < f < 300 \text{ MHz}$	$10 \text{ m} > \lambda > 1 \text{ m}$
	UHF	$300 \text{ MHz} < f < 3 \text{ GHz}$	$1 \text{ m} > \lambda > 0.1 \text{ m}$
Microondas		$3 \times 10^9 \text{ Hz} < f < 3 \times 10^{12} \text{ Hz}$	$0.3 \text{ m} > \lambda > 0.1 \text{ mm}$
Infravermelhos		$3 \times 10^{12} \text{ Hz} < f < 4 \times 10^{14} \text{ Hz}$	$1 \text{ mm} > \lambda > 0.7 \mu\text{m}$
Luz visível		$4 \times 10^{14} \text{ Hz} < f < 3 \times 10^{15} \text{ Hz}$	$0.3 \mu\text{m} > \lambda > 0.7 \mu\text{m}$
Ultravioletas		$7.5 \times 10^{14} \text{ Hz} < f < 5 \times 10^{17} \text{ Hz}$	$0.4 \mu\text{m} > \lambda > 0.6 \text{ nm}$
Raios X		$3 \times 10^{16} \text{ Hz} < f < 3 \times 10^{20} \text{ Hz}$	$10 \text{ nm} > \lambda > 1 \text{ pm}$
Raios $\gamma$		$f > 3 \times 10^{18} \text{ Hz}$	$100 \text{ pm} > \lambda > 0.01 \text{ pm}$

Pode fazer-se uma representação gráfica:

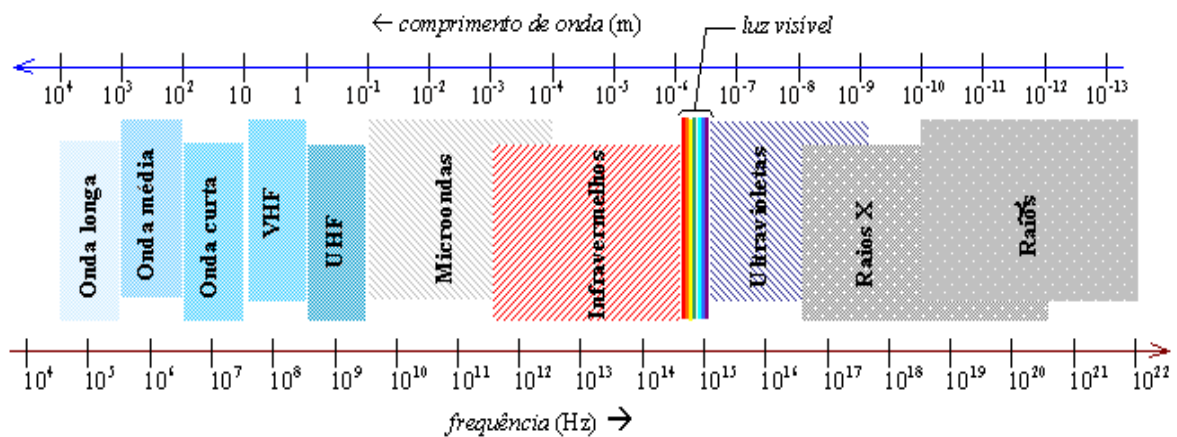


Fig. 2.5 – O espectro das ondas electromagnéticas

## 2.7. Fenómenos periódicos

### 2.7.1. Exemplos de fenómenos periódicos

- Mecânica: Movimento da Terra (e dos planetas do Sistema Solar) à volta do Sol,  
 Movimento da Lua em torno da Terra,  
 Movimento dos satélites artificiais em volta da Terra,  
 Ondas do mar, em determinadas situações,  
 Movimento do pêndulo gravítico e do pêndulo de torção,  
 Movimento dos êmbolos de um motor de combustão,  
 Movimento de um alternador e de um motor eléctrico,  
 ...
- Electrotecnia: Tensão e corrente eléctricas produzidas por um alternador,  
 Geradores de sinais eléctricos periódicos,  
 Radiações electromagnéticas (ondas de rádio, de TV, ...),  
 ...
- Óptica: Luz visível (a luz é uma radiação electromagnética),  
 Luz ultravioleta e infravermelha,  
 ...

### 2.7.2. Representação analítica e gráfica

Vai representar-se analiticamente um fenómeno por  $s(t)$ . Um fenómeno manifesta-se por meio de sinais. Um *senal* é algo que transporta informação. Em matemática será representado por meio de uma função. Um sinal, é *periódico*, sendo  $T$  um seu período, se e só se, para todo o  $k$  inteiro

$$s(t + kT) = s(t) \quad (2.79)$$

Na prática considera-se o menor período  $T$  positivo como sendo o *período do sinal*.

Repare-se que apesar de se estar a utilizar a letra  $t$  para a variável independente (sugerida pelo facto de muitos fenómenos serem periódicos no tempo, esta variável poderá representar uma grandeza qualquer, por exemplo um comprimento; há muitas grandezas que exibem periodicidade espacial, por exemplo a fotografia de uma superfície ondulada, uma estrutura cristalina, etc.

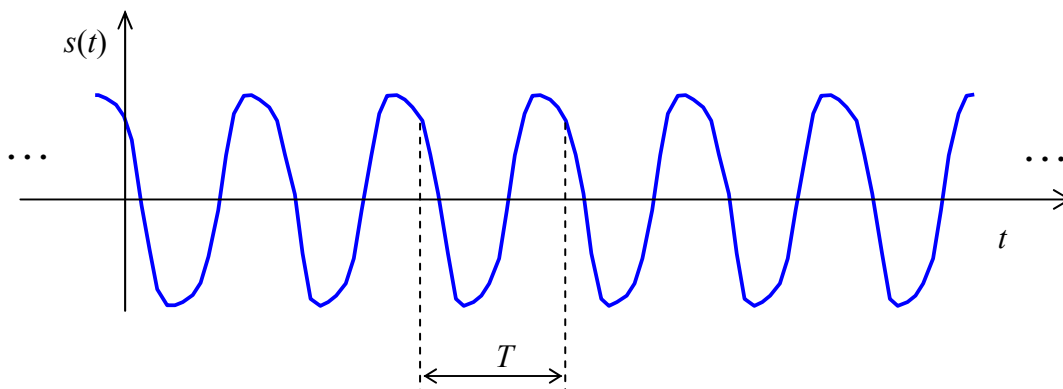


Fig. 2.6 – Representação gráfica de um fenómeno periódico no tempo

Um possível sinal representado por (2.79) encontra-se representado graficamente na Fig. 2.6. Nela pode observar-se o período do sinal. Normalmente representa-se o período pelo intervalo entre dois zeros pois estes são mais fáceis de identificar.

O período exprime-se nas unidades da variável independente. Ao inverso do período dá-se o nome de frequência

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.80)$$

A frequência tem o significado do número de períodos contidos na unidade de tempo.

Para uma grandeza periódica no tempo:

**Período** – exprime-se em “segundo” ou outras unidades (minutos, anos, ...)

**Frequência** – exprime-se em “hertz”, Hz, (também conhecido por ciclo por segundo) ou outras unidades (rotações por minuto, ...)

Para uma grandeza periódica no espaço:

**Período espacial**– exprime-se em “metro” ou seus múltiplos ou submúltiplos (m, nm, ...). Representa-se por  $L$ . No caso do fenómeno ser a propagação de uma onda, ao período espacial dá-se o nome de **comprimento de onda**, e representa-se por  $\lambda$ .

**Frequência espacial**– exprime-se em “m<sup>-1</sup>”.

É conveniente, em particular quando os fenómenos periódicos são sinusoidais, mas não restritos a estes, introduzir uma variável designada por **frequência angular**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (2.81)$$

No caso do fenómeno ser a propagação de uma onda introduz-se a variável  $k$ , designada por **número de ondas por comprimento**, e definida por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.82)$$

Diz-se que o sinal  $s_1(t)$ , não necessariamente periódico, representa  $s(t)$  **atrasado**, se tiver a mesma evolução e só ocorrer ao fim de algum tempo. Se ocorrer antes o sinal diz-se **avançado**. Se dois sinais forem periódicos, o atraso de  $T_D$  um deles é exactamente equivalente a um avanço de  $T - T_D$ .

### 2.7.3. O sinal sinusoidal

O sinal sinusoidal, representado na Fig. 2.7b, é descrito por

$$s(t) = A \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (2.83)$$

em que:  $A$  – amplitude,  $\omega$  – frequência angular,  $\varphi$  – defasagem inicial.

Repare-se que o produto  $\omega t$  é adimensional o que satisfaz a condição exigida para uma expressão homogénea, isto é, válida para qualquer sistema de unidades.

Observando agora a Fig. 2.7a, conclui-se que o sinal sinusoidal pode ser obtido com o auxílio de uma circunferência, sobre a qual se traça um vector de módulo  $A$ , o **vector girante** ou **fasor**, que roda com a velocidade angular  $\omega$  no sentido inverso (contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio). O valor do sinal é, em cada instante, igual à projecção do vector girante sobre o eixo das ordenadas.

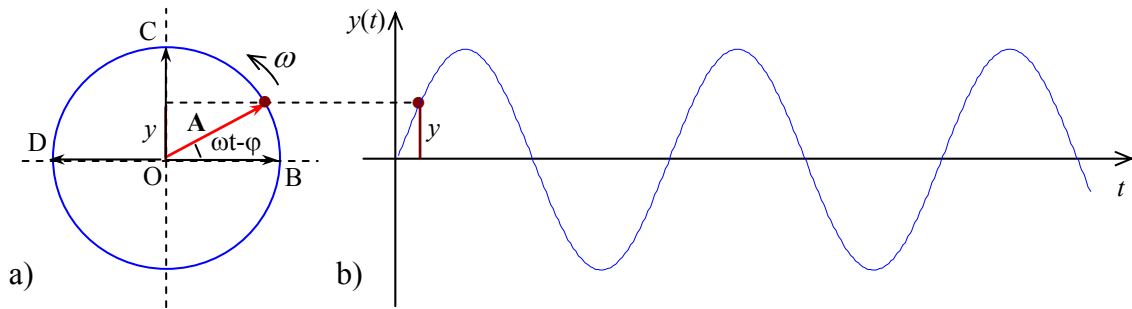


Fig. 2.7 – Vector girante e sinal sinusoidal

Repare-se que o vector  $\mathbf{A}$  define a amplitude e a fase do sinal sinusoidal, mas apenas para uma determinada frequência angular. Estes diagramas são muito úteis em Electrotecnia, onde habitualmente se trabalha com apenas uma frequência, a da rede.

Dois sinais sinusoidais estão *em quadratura* se forem descritos por vectores girantes perpendiculares. No caso em que  $\varphi = 0$ , tem-se o vector  $\mathbf{OB}$  a representar o sinal “seno” e o vector  $\mathbf{OC}$  a representar o “co-seno”. Note-se que  $\cos(\omega t)$  está avançado de  $\pi/2$  em relação a  $\sin(\omega t)$ . Por sua vez, o sinal representado pelo vector  $\mathbf{OD}$  está avançado de  $\pi/2$  em relação ao sinal representado por  $\mathbf{OC}$ , ficando em *oposição de fase* com o sinal  $\mathbf{OB}$ .

Estes diagramas oferecem maior potencialidade se em vez de diagramas vectoriais se pensar em termos de *números complexos*. Estes têm a vantagem de terem definidas as operações de multiplicação e divisão entre os seus elementos, o que não acontece com os vectores. Nestas condições, a partir de um sinal sinusoidal, representado pelo *afixo* de um complexo no *plano de Argand*, obtém-se um sinal avançado de  $\pi/2$ , multiplicando-o pela unidade imaginária  $j$ . Voltando a multiplicar por  $j$  obtém-se um sinal em oposição de fase (com efeito  $j \times j = j^2 = -1$ ).

O número complexo de módulo  $A$ , que roda sobre a circunferência de raio  $A$ , não é mais do que a exponencial complexa

$$Y = Ae^{j\omega t} \quad (2.84)$$

Com efeito pela *fórmula de Euler*<sup>(16)</sup> tem-se

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (2.85)$$

pelo que o coeficiente da parte imaginária de  $Y$ , que se representa sobre o eixo imaginário, representa o valor instantâneo do sinal, tal como foi apresentado atrás.

<sup>16</sup> Leonhard Euler, matemático suíço, 1707-1783.

#### 2.7.4. A série de Fourier

O sinal sinusoidal é muito corrente na descrição de fenómenos físicos. É um sinal que é descrito apenas com o auxílio de 3 parâmetros, a **amplitude**, a **frequência** e a **fase inicial**. É um sinal periódico. Muitos outros sinais periódicos têm formas características: os sinais rectangular, triangular, em dente de serra, a sequência de impulsos, a sinusóide rectificada, etc.

O matemático francês Joseph Fourier<sup>(17)</sup> mostrou que qualquer sinal periódico que satisfaça determinadas condições (normalmente satisfeitas pelos sistemas físicos, indicadas mais à frente) pode ser representado por uma sobreposição de um certo número de sinais sinusoidais de frequências iguais a múltiplos da frequência do sinal periódico, e com amplitudes e fases bem definidas. A esta soma, de um número infinito de sinais sinusoidais dá-se o nome de série de Fourier associada ao sinal periódico.

No campo da Física é bem conhecido o fenómeno óptico da decomposição da luz branca por meio de um prisma, obtendo-se deste modo luz colorida. Faz-se assim a decomposição da luz nas suas diversas “**frequências constituintes**”. É também sabido que o som, (música, voz, etc.) é composto por **sinais graves** e **sinais agudos**, ou seja, sinais com frequências baixas e sinais com frequências altas. As **séries de Fourier** são uma forma de analisar a estrutura de sinais periódicos, fazendo a sua decomposição em sinais elementares sinusoidais.

Todo o sinal contínuo real, não necessariamente periódico, que dentro de um intervalo  $(t_a, t_b)$  obedeça às **condições de Dirichlet**<sup>(18)</sup>, isto é:

- seja limitado,
- tenha um número finito de descontinuidades de 1ª espécie,
- tenha um número finito de máximos e mínimos,
- seja absolutamente integrável, isto é  $\int_{t_a}^{t_b} |s(t)| dt < \infty$ ,

pode ser representado por uma série, cujos termos são sinusóides. Fora do intervalo  $(t_a, t_b)$  a série replica um sinal periódico constituído por troços iguais ao do sinal que se encontra dentro do intervalo.

Para o caso de sinais periódicos, de período  $T$ , definindo **frequência angular**  $\omega$  pela expressão  $\omega=2\pi/T$ , pode representar-se o sinal pela série, designada por **série de Fourier associada ao sinal**,

$$s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(k\omega t) \quad (2.86)$$

em que os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  são calculados pelas expressões seguintes, obtidas a partir de (2.86) multiplicando ambos os membros por  $\cos(k\omega t)$  ou por  $\text{sen}(k\omega t)$  e utilizando a propriedade das funções sinusoidais serem **ortogonais**:

<sup>17</sup> Jean Baptiste Joseph Fourier, matemático francês, 1768-1830

<sup>18</sup> Peter Gustav Dirichlet, matemático alemão, 1805-1859.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt \\ a_k = \frac{2}{T} \int_T s(t) \cos(k\omega t) dt, & k = 1, 2, \dots \\ b_k = \frac{2}{T} \int_T s(t) \text{sen}(k\omega t) dt, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.87)$$

O parâmetro  $a_0$  representa o **valor médio** do sinal  $s(t)$ , num período. Nos pontos de descontinuidade do sinal,  $t_d$ , a série de Fourier associada converge para  $\frac{1}{2} [s(t_d+0) + s(t_d-0)]$

Na Fig. 2.8 representa-se um período de um sinal analógico em forma de onda quadrada, e a sua aproximação por meio dos primeiros  $n = 7$  termos da série de Fourier associada.

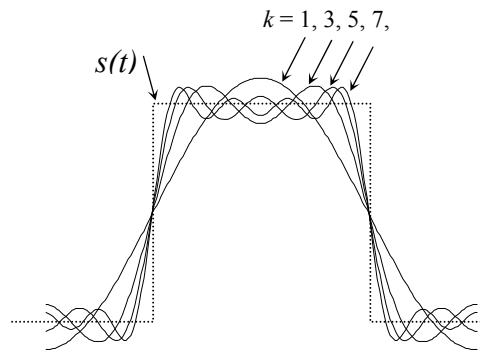


Fig. 2.8 – Representação de um sinal periódico.

### 2.7.5. O movimento harmónico simples

Muitos fenómenos físicos são descritos por meio de uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Cx = 0 \quad (2.88)$$

É o caso do pêndulo gravítico (pequenas oscilações), do sistema massa-mola (sem amortecimento), do circuito LC (bobina e condensador sem perdas), e outros. Esta equação diferencial, linear, de coeficientes constantes e homogénea, admite como solução um sinal sinusoidal. Quando  $x$  representa uma posição a 2ª derivada representa uma aceleração e o movimento resultante é designado por **movimento harmónico simples**, que é uma oscilação sinusoidal. O termo “**harmónica**” é usado para indicar um sinal sinusoidal de frequência múltipla de uma determinada.

Exemplifique-se para o caso de um sistema constituído por uma massa e uma mola, como indicado na Fig. 2.9. O corpo pode deslocar-se apenas segundo a direcção  $x$ , sem atrito. Com o sistema em repouso o corpo encontra-se na posição  $x = 0$  e a resultante das forças que sobre ele actuam é nula. Desloque-se o bloco para a posição  $x_0$ . A força exterior que sobre ele actua, resultante da deformação da mola, tem o valor

$$f = -kx \quad (2.89)$$

Liberte-se agora o corpo. Este tenderá a voltar para a posição inicial.

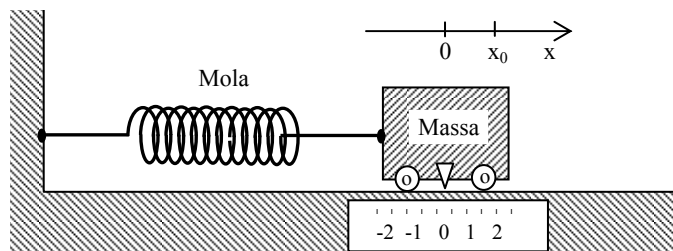


Fig. 2.9 – Sistema massa-mola

De acordo com a 2ª lei de Newton a massa ficará sujeita a uma aceleração  $\ddot{x}$  tal que

$$m\ddot{x} = f \quad (2.90)$$

Combinando (2.89) com (2.90) obtém-se

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.91)$$

que admite como solução

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (2.92)$$

com

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.93)$$

Os valores de  $x_0$  e de  $\varphi$  determinam-se a partir das condições iniciais.

O circuito constituído por um condensador em paralelo com uma bobina conduz também a uma equação igual a (2.88).

## 2.8. Circuitos em corrente alternada

### 2.8.1. Tensão alternada sinusoidal

A descrição analítica de uma tensão alternada é a seguinte:

$$u(t) = U_m \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (2.94)$$

A representação gráfica desta função encontra-se na figura seguinte. Para uma corrente ou qualquer outra grandeza alternada sinusoidal a descrição é análoga.

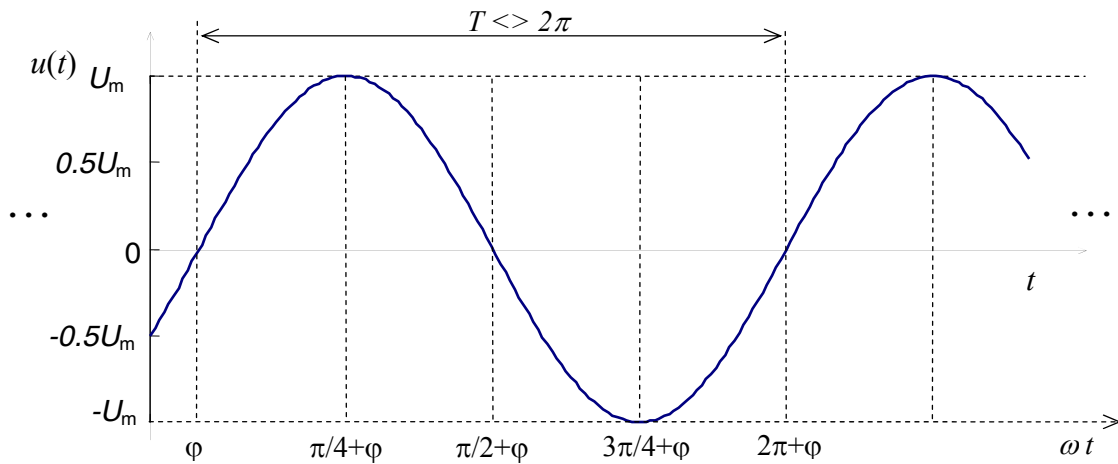
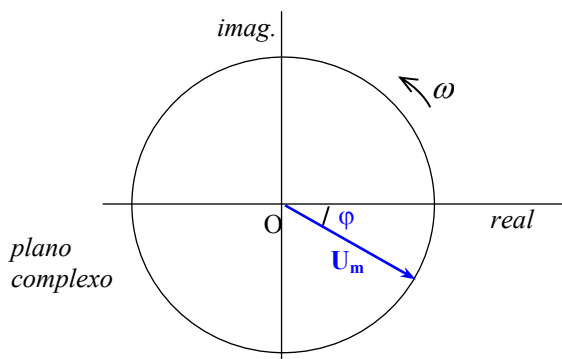


Fig. 2.10 – Representação gráfica de uma tensão alternada sinusoidal

$U_m$  – amplitude (sempre positiva)       $\omega$  - frequência angular. Tem-se  $\omega = \frac{2\pi}{T}$   
 $T$  – período (expresso em tempo)       $\varphi$  – desfasagem inicial

Em electrotecnia é comum representar um sinal periódico por meio de uma circunferência, sobre a qual se traça um vector de módulo  $U_m$ , o **vector girante** ou **fasor**, que roda com a velocidade angular  $\omega$  no sentido inverso (contrário ao do movimento dos ponteiros de um relógio). O valor do sinal é, em cada instante, igual à projecção do vector girante sobre o eixo das ordenadas.



Nestas condições poderá escrever-se simbolicamente

$$u(t) = U_m e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (2.95)$$

$$= U_m e^{-j\varphi} e^{j\omega t} = \mathbf{U}_m e^{j\omega t}$$

Com  $\mathbf{U}_m = U_m e^{-j\varphi} \quad (2.96)$

Fig. 2.11 – Representação complexa de uma grandeza sinusoidal

### 2.8.2. Tensão e corrente numa resistência

Considere-se o circuito representado na Fig. 2.12, em que um gerador de tensão sinusoidal, G, se encontra ligado a uma resistência. Por hipótese é

$$u_G(t) = U_G \text{sen}(\omega t) \quad (2.97)$$

Mas pela lei de Kirchoff, das malhas tem-se a cada instante  $u_R(t) = u_G(t)$ , o que implica  $U_R = U_G$ . A cada instante é válida a lei de Ohm, pelo que  $u_R(t) = R i_R(t)$ .

Logo  $i_R(t) = \frac{U_R}{R} \text{sen } \omega t = I_R \text{sen } \omega t$

com 
$$I_R = \frac{U_R}{R} \quad (2.98)$$

Numa resistência a tensão e a corrente estão **em fase**.

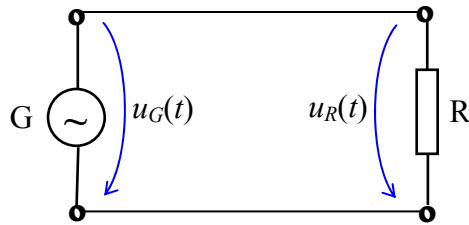


Fig. 2.12 – Gerador sinusoidal ligado a uma resistência

A potência transferida do gerador para a resistência é obtida a partir de

$$p(t) = u_R(t) i_R(t) \quad (2.99)$$

Substituindo os valores instantâneos pelos valores sinusoidais vem

$$p(t) = U_R \text{sen}(\omega t) I_R \text{sen}(\omega t) = U_R I_R \text{sen}^2(\omega t) \quad (2.100)$$

O valor instantâneo desta potência é sempre positivo, o que significa que o gerador está sempre a enviar energia para a resistência. Repare-se que a potência tem uma frequência dupla da tensão (ou da corrente).

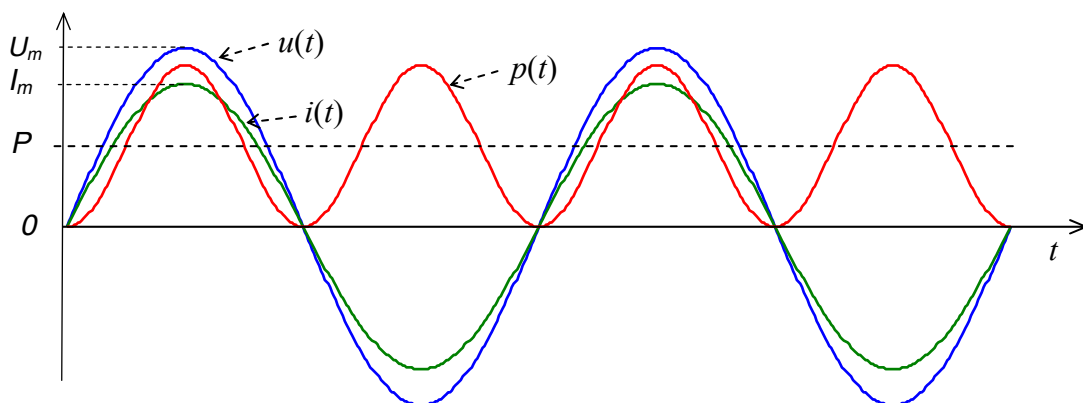


Fig. 2.13 – Tensão, corrente e potência numa resistência

O valor médio da potência transferida durante um período é calculado por

$$P_R = \int_0^T U_R I_R \sin^2(\omega t) dt = U_R I_R \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} U_R I_R \quad (2.101)$$

A potência, transferida do gerador para a resistência, é dissipada nesta sob a forma de calor, sendo o fenómeno conhecido com o nome de **efeito de Joule**.

Definindo valor eficaz de uma grandeza sinusoidal (tensão ou corrente) pelas relações

$$U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (2.102)$$

pode escrever-se

$$P_R = U_{R_{ef}} I_{R_{ef}} \quad (2.103)$$

O significado de valor eficaz é o seguinte:

***O valor eficaz é aquele que em corrente contínua conduz à mesma dissipação por efeito de Joule que uma corrente alternada sinusoidal com amplitude  $I_m$ .***

Com as definições (2.102) a tensão e a corrente alternadas sinusoidais podem escrever-se

$$u(t) = \sqrt{2} U_{ef} \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.104)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I_{ef} \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.105)$$

### 2.8.3. Tensão e corrente numa bobina

Considere-se agora o circuito representado na Fig. 2.14, em que um gerador de tensão sinusoidal, G, se encontra ligado uma bobina. Por hipótese é  $v_G(t) = V_G \sin(\omega t)$ . Mas pela lei das malhas tem-se a cada instante  $u_L(t) = u_G(t)$ , o que implica  $U_L = U_G$ .

A cada instante é válida a lei da indução, pelo que a variação do fluxo magnético produzido pela corrente na bobina origina uma f.e.m. que contraria  $u_L(t)$ . Logo, será

$$u_L(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.106)$$

Mas o fluxo magnético na bobina é proporcional à corrente que a atravessa (pela lei de Ampere)

$$\phi = L \cdot i \quad (2.107)$$

O coeficiente de proporcionalidade,  $L$ , designa-se por coeficiente de auto-indução da bobina. Substituindo (2.107) em (2.106) obtém-se

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.108)$$

A equação (2.108) pode ser resolvida em ordem a  $i(t)$ , resultando

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau \quad (2.109)$$

Para uma tensão do gerador alternada sinusoidal (tensão aplicada à bobina) dada por (2.94), em que se utiliza o índice ‘L’ para indicar amplitude da tensão na bobina, obtém-se, depois de integrar e considerando nula a constante de integração,

$$i_L(t) = -\frac{1}{\omega L} U_L \cos(\omega t) = \frac{1}{\omega L} U_L \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (2.110)$$

Fazendo  $I_L = \frac{U_L}{\omega L}$  pode escrever-se

$$i_L(t) = I_L \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (2.111)$$

Conclui-se assim que numa bobina a corrente se encontra **atrasada** de  $90^\circ$  em relação à tensão aos seus terminais. Chama-se **reactância** da bobina (ou **indutância**) à quantidade

$$X_L = \omega L \quad (= \frac{U_L}{I_L}) \quad (2.112)$$

A reactância tem as dimensões de uma resistência, pelo que se exprime em ohm.

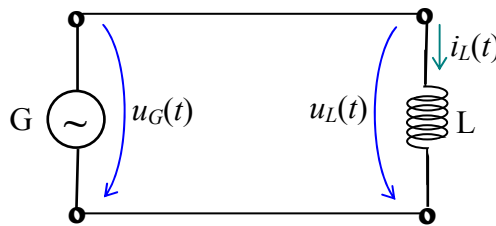


Fig. 2.14 – Gerador sinusoidal ligado a uma bobina

A potência transferida do gerador para a bobina é obtida a partir de (2.99),  $p(t) = u_L(t)i_L(t)$ . Substituindo os valores instantâneos pelos valores sinusoidais vem

$$p(t) = U_L \sin(\omega t) I_L \sin(\omega t - \pi / 2) \quad (2.113)$$

O valor instantâneo desta potência tem uma frequência  $2\omega$  e valor médio nulo, sendo pois ora positivo ora negativo, o que significa que o gerador durante  $\frac{1}{4}$  de ciclo da tensão está a enviar energia para a bobina e durante o  $4^\circ$  de ciclo seguinte está a receber.

O valor médio da potência transferida durante um período é calculado por

$$P_L = \int_0^T U_L \sin(\omega t) I_L \sin(\omega t - \pi / 2) dt = 0 \quad (2.114)$$

Na figura seguinte encontra-se a representação temporal da tensão, da corrente e da potência na bobina, bem como o respectivo fasor.

De um modo geral dá-se o nome de **impedância** à relação entre os fasores da tensão e da corrente, num circuito genérico. Tendo em conta a defasagem de  $90^\circ$  existente entre a tensão e a corrente, a impedância da bobina (**reactância**) é dada por

$$\mathbf{X}_L = j\omega L \quad (2.115)$$

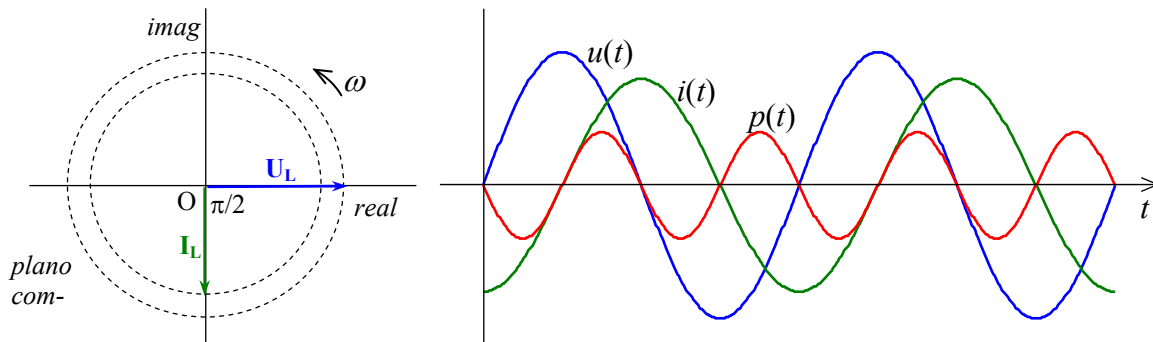


Fig. 2.15 – Fasores da corrente e tensão na bobina

#### 2.8.4. Tensão e corrente num condensador

Seja o circuito representado na Fig. 2.16, em que um gerador de tensão sinusoidal, G, se encontra ligado um condensador. Como nos casos anteriores será  $U_L = U_G$ . Pode pois escrever-se

$$u_c(t) = U_C \text{sen}(\omega t) \quad (2.116)$$

A corrente no condutor de ligação ao condensador é dada pela variação da carga entre as suas armaduras:

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.117)$$

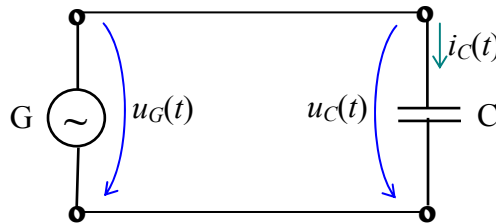


Fig. 2.16 – Gerador sinusoidal ligado a um condensador

Mas, por definição de **capacidade** de um condensador é  $q = C \cdot u$  (a todo o instante), pelo que

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad (2.118)$$

A equação (2.118) pode ser resolvida em ordem a  $u$ , resultando

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) d\tau \quad (2.119)$$

Para uma tensão do gerador alternada sinusoidal (tensão aplicada ao condensador), em que se utiliza o índice ‘C’ para indicar amplitude da tensão no condensador, obtém-se, depois de derivar,

$$i_c(t) = \omega C U_c \cos(\omega t) \quad (2.120)$$

Fazendo  $I_c = \omega C U_c$  pode escrever-se

$$i_c(t) = I_c \cos(\omega t) = I_c \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (2.121)$$

Conclui-se assim que num condensador a corrente se encontra **avançada** de  $90^\circ$  em relação à tensão aos seus terminais. Chama-se **reactância** do condensador (ou **capacitância**) à quantidade

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad (= \frac{U_c}{I_c}) \quad (2.122)$$

A reactância tem as dimensões de uma resistência, pelo que se exprime em ohm.

A potência transferida do gerador para o condensador é obtida a partir de (2.99),  $p(t) = u_c(t)i_c(t)$ . Substituindo os valores instantâneos pelos valores sinusoidais vem

$$p(t) = U_c \sin(\omega t) I_c \sin(\omega t + \pi/2) \quad (2.123)$$

O valor instantâneo desta potência tem uma frequência  $2\omega$  e valor médio nulo, sendo ora positivo ora negativo, o que significa que o gerador durante  $\frac{1}{4}$  de ciclo da tensão está a enviar energia para a bobina e durante o  $4^\circ$  de ciclo seguinte está a receber.

O valor médio da potência transferida durante um período é calculado por

$$P_c = \int_0^T U_c \sin(\omega t) I_c \sin(\omega t + \pi/2) dt = 0 \quad (2.124)$$

Na figura seguinte encontra-se a representação temporal da tensão, da corrente e da potência na bobina, bem como o respectivo fasor.

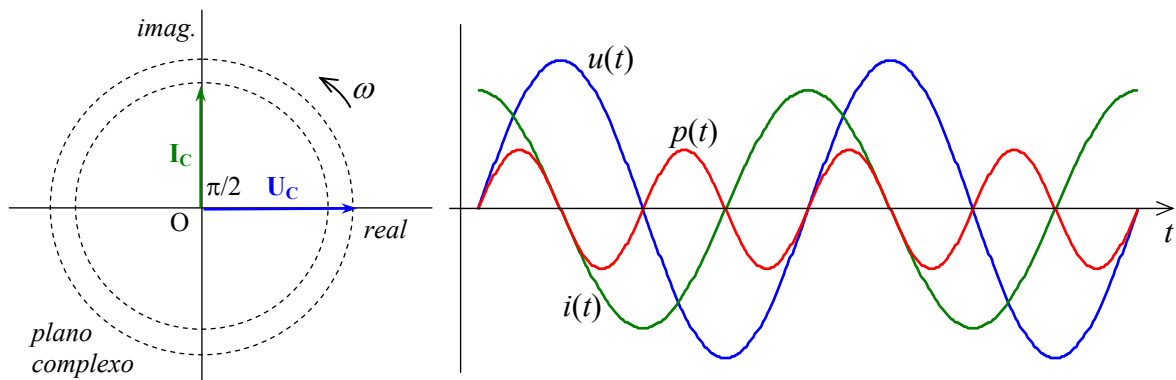


Fig. 2.17 – Fasores da corrente e tensão no condensador

Tendo em conta o avanço de  $90^\circ$  da corrente em relação à tensão, a impedância do condensador (capacitância) é dada por

$$\mathbf{X}_c = \frac{1}{j\omega C} \quad (2.125)$$

### 2.8.5. Circuito RLC série

Considere-se o circuito constituído por uma resistência em série com uma bobina e em série com um condensador, como representado na Fig. 2.18, em que G é um gerador de tensão sinusoidal.

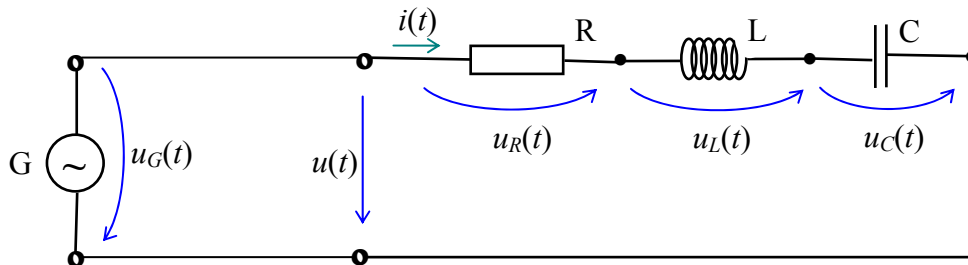


Fig. 2.18 – Circuito RLC série

Uma vez que os elementos do circuito se encontram em série,  $i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) = i(t)$ . Pela lei das malhas é, a cada instante,

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (2.126)$$

Viu-se atrás que  $u_R(t) = Ri(t)$ ,  $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$  e  $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$ . Substituindo estes valores em (2.126) obtém-se

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (2.127)$$

Esta equação admite uma solução também sinusoidal (corrente sinusoidal), com a mesma frequência da tensão  $u(t)$ . Vai usar-se a notação complexa:

$$i(t) = \mathbf{I}e^{j\omega t} \quad (2.128)$$

Será então  $\frac{di(t)}{dt} = j\omega \mathbf{I}e^{j\omega t}$  e  $\int_0^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{j\omega} \mathbf{I}e^{j\omega t}$ . Substituindo em (2.127) resulta

$$\mathbf{U}e^{j\omega t} = R\mathbf{I}e^{j\omega t} + j\omega L\mathbf{I}e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}e^{j\omega t} \quad (2.129)$$

Como esta equação é válida para qualquer  $t$  resulta

$$\mathbf{U} = (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})\mathbf{I} \quad (2.130)$$

Chamando impedância complexa à quantidade

$$\mathbf{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad (2.131)$$

pode escrever-se

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad \text{ou} \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}} \quad (2.132)$$

que tem o aspecto formal da lei de ohm.

A expressão (2.131) pode representar-se sobre o plano complexo do seguinte modo:

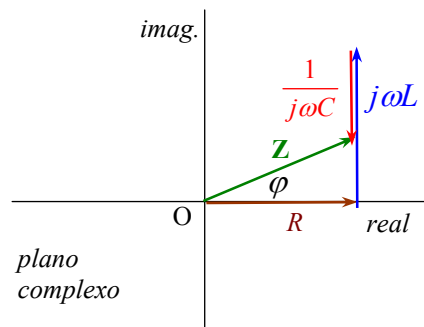


Fig. 2.19 – Diagrama de impedâncias do circuito RLC série

Conhecido o valor da tensão pode obter-se a corrente dividindo  $U$  por  $Z$ . Vectorialmente traça-se o gráfico indicado na Fig. 2.20.

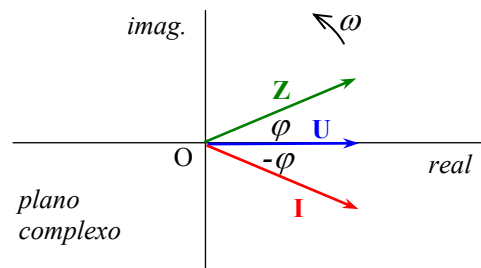


Fig. 2.20 – Tensão, corrente e impedância complexas

Repare-se que a impedância, sendo um número complexo, se pode escrever na forma

$$Z = Ze^{j\varphi} \quad (2.133)$$

Podem dar-se os casos seguintes:

- $\varphi = 0$ : O circuito diz-se **resistivo** ou **ohmico puro**. No circuito RLC série óhmico, o termo  $j\omega L$  é cancelado pelo termo  $\frac{1}{j\omega C}$ .
- $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ : O circuito diz-se **indutivo**. A corrente está atrasada em relação à tensão.
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ : O circuito diz-se **indutivo puro**. Não há resistência. A corrente encontra-se em quadratura com a tensão, e atrasada em relação a esta.
- $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$ : O circuito diz-se **capacitivo**. A corrente encontra-se avançada em relação à tensão.
- $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ : O circuito diz-se **capacitivo puro**. Não há resistência. A corrente encontra-se em quadratura com a tensão, e avançada em relação a esta.

### 2.8.6. Energia e potência

Considere-se o circuito constituído por uma fonte de tensão ligada a um circuito de carga, como se mostra na Fig. 2.21.

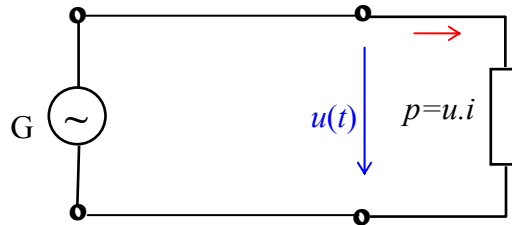


Fig. 2.21 – Potência instantânea num circuito

Pode mostrar-se que a cada instante é transferida uma determinada potência do gerador para o circuito, designada por **potência instantânea**, dada pela expressão

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (2.134)$$

Se a tensão for alternada sinusoidal, a corrente também o será. Neste caso a carga será caracterizada pela sua impedância complexa  $\mathbf{Z}$ . Pode então escrever-se

$$u(t) = U_m \text{sen } \omega t = \sqrt{2} U_{ef} \text{sen } \omega t \quad (2.135)$$

$$i(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} I_{ef} \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (2.136)$$

pelo que, usando (2.134), 
$$p(t) = 2U_{ef}I_{ef} \text{sen } \omega t \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (2.137)$$

ou ainda 
$$p(t) = U_{ef}I_{ef} \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) + U_{ef}I_{ef} \text{sen } \varphi \text{sen } 2\omega t \quad (2.138)$$

A expressão (2.138) podem representar-se graficamente do modo indicado na Fig. 2.22.

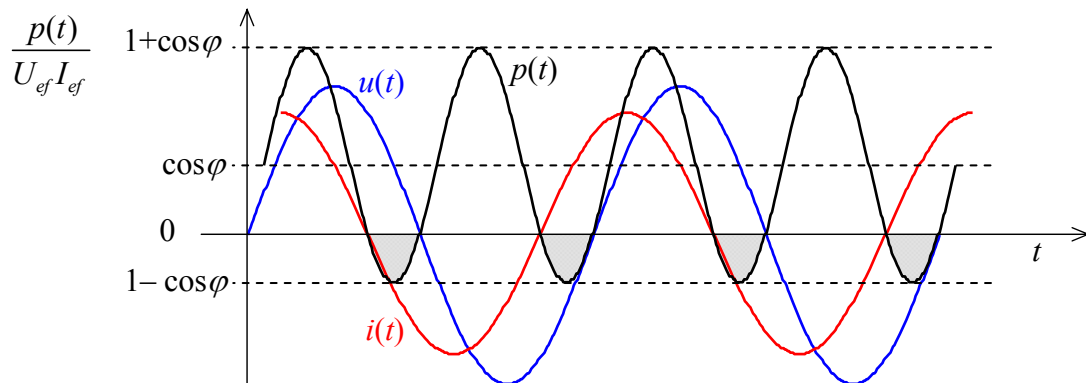


Fig. 2.22 – Tensão, corrente e potência num circuito RLC

Observa-se pela figura que  $p(t)$  pode ser positivo ou negativo, estando este último caso marcado a cinzento. Quando  $p(t) > 0$  o **gerador fornece energia ao circuito**. No caso em que  $p(t) < 0$  é o **circuito que fornece energia ao gerador**.

O valor médio da potência em jogo obtém-se pela expressão

$$P = \frac{1}{T} \int_T p(t) dt = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi \quad (2.139)$$

Ao valor médio da potência fornecida pelo gerador, dá-se o nome de **potência activa**.

O gerador deverá ser capaz de fornecer uma tensão com o máximo de amplitude (ou, de outro ponto de vista, com o valor eficaz nominal), e uma corrente com o valor eficaz nominal, embora não simultaneamente. Esta simultaneidade só ocorrerá se o gerador for ligado a um circuito óhmico puro. Por este motivo interessa considerar a grandeza seguinte, chamada **potência aparente**:

$$S = U_{ef} I_{ef} \quad (2.140)$$

Uma outra grandeza que interessa considerar, é a **potência reactiva**. Esta é definida por

$$Q = U_{ef} I_{ef} \sin \varphi \quad (2.141)$$

Note-se que  $P$ ,  $Q$  e  $S$  constituem os lados de um triângulo rectângulo:

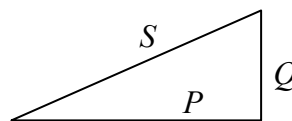


Fig. 2.23 – Triângulo das potências

### 2.8.7. Energia armazenada

Considere-se a expressão (2.134) que representa a potência transferida a cada instante para um circuito. A energia transferida, desde o instante zero até ao instante actual será

$$w(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = \int_0^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau \quad (2.142)$$

Considere-se o caso da **bobina**. Para este dispositivo é, por (2.108),  $v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ .

Substituindo este valor de  $v(t)$  em (2.142) e integrando obtém-se (o índice  $B$  é de bobina)

$$w_B(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (2.143)$$

Que representa a energia armazenada a cada instante numa bobina de coeficiente de auto-indução  $L$ , quando percorrida pela corrente  $i(t)$ .

Para o **condensador** obtém-se uma expressão semelhante: (índice  $C$  para condensador)

$$w_C = \frac{1}{2} Cv^2(t) \quad (2.144)$$

## 2.9. Transformador

### 2.9.1. Descrição

Na sua forma mais simples o **transformador** é constituído por duas bobinas ligadas por um **circuito magnético** comum, que nos transformadores de potência é constituído por um núcleo de **ferro laminado**.

A configuração básica será a indicada na Fig. 2.6, onde um transformador se encontra ligado a um gerador e a uma carga. A tensão  $u_1(t)$  variável no tempo, proveniente do gerador ou da rede eléctrica, é aplicada à bobina primária. Esta será percorrida por uma corrente  $i_1(t)$  que origina um fluxo magnético no núcleo, também variável no tempo,  $\phi_1(t)$ . A variação deste fluxo através da bobina secundária origina uma tensão  $u_2(t)$  que poderá ser aplicada à carga ou a uma rede eléctrica. A corrente  $i_2(t)$  por sua vez origina um fluxo  $\phi_2(t)$  que se irá opor ao fluxo  $\phi_1(t)$ .

Os sentidos das tensões e correntes representados foram *convencionados* para representar a potência a entrar no transformador.

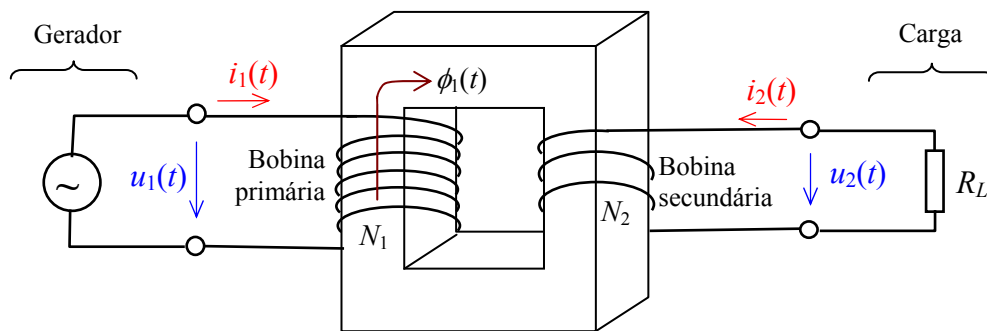


Fig. 2.24 – Desenho de um transformador

A utilização do transformador é muito variada, sendo fundamental em determinadas aplicações. O transformador só pode ser utilizado com **correntes variáveis no tempo**, em particular com correntes alternadas. Nunca pode ser usado com corrente contínua. É utilizado em produção e distribuição de energia, em fontes de alimentação, em telecomunicações e electrónica. Consoante a aplicação e a potência assim a constituição e aspecto do transformador.

### 2.9.2. Equações instantâneas

O transformador é caracterizado pelos parâmetros das bobinas (primária e secundária) e pela ligação magnética entre estas bobinas.

Parâmetros da bobina primária:

- $N_1$  – número de espiras
- $R_1$  – resistência das espiras
- $L_1$  – Coeficiente de auto-indução

Parâmetros da bobina secundária:

- $N_2$  – número de espiras
- $R_2$  – resistência das espiras
- $L_2$  – coeficiente de auto-indução

Ligação magnética entre as bobinas primária e secundária:

- $L_M$  – coeficiente de indução mútua.

No caso dos transformadores de potência é importante saber-se a **dispersão do fluxo** magnético entre as bobinas, a **saturação do ferro** do núcleo e as **perdas de energia** no ferro do núcleo.

A aplicação das leis do electromagnetismo, nomeadamente a lei de Ohm e a lei da indução de Faraday às bobinas primária e secundária, conduz às seguintes equações, que relacionam os valores instantâneos das tensões e correntes no primário e secundário:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L_M \frac{di_2(t)}{dt} \end{array} \right. \quad (2.145)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2(t) = R_2 i_2(t) + L_M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{array} \right. \quad (2.146)$$

Estas equações utilizam os sentidos das tensões e correntes indicados na Fig.19. Na equação (2.145)  $R_1 i_1(t)$  representa a queda de tensão óhmica no enrolamento primário e

o termo  $L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$  representa uma queda de tensão indutiva pura na bobina primária.

Estes dois termos existem mesmo que não haja corrente no secundário, isto é, estando o **transformador em vazio** (sem carga). O termo  $L_M \frac{di_2(t)}{dt}$  constitui uma queda de tensão

indutiva devido à existência de ligação magnética entre as bobinas. Para a equação (2.146) pode dar-se uma interpretação análoga.

Define-se **coeficiente de ligação magnética**,  $K$ , pela expressão

$$K = \frac{L_M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (2.147)$$

Diz-se que um transformador tem **ligação magnética perfeita** quando

$$L_1 = \frac{N_1}{N_2} L_M \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{N_2}{N_1} L_M \quad (2.148)$$

o que conduz, substituindo estes valores de  $L_1$  e de  $L_2$  em (2.147), ao valor  $K = 1$ .

Num transformador com ligação magnética perfeita e com  $R_1 = 0$  e  $R_2 = 0$  (**sem perdas no cobre**) pode obter-se, a partir de (2.145) e de (2.146), a seguinte relação

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} \quad (2.149)$$

### 2.9.3. Transformador ideal

Um transformador diz-se **ideal** se além de ter a resistência eléctrica dos enrolamentos nula e ligação magnética perfeita, tiver  $L_M \rightarrow \infty$ , o que implica  $L_1 \rightarrow \infty$  e  $L_2 \rightarrow \infty$ . Nestas condições prova-se que além de (2.149) se verifica ainda

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \quad (2.150)$$

É costume representar um transformador pelo esquema indicado na figura Fig. 2.25.

As equações (2.145) e (2.146) não se aplicam ao transformador ideal.

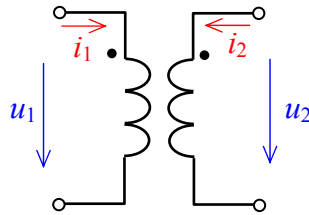


Fig. 2.25 – Representação esquemática de um transformador

Neste esquema indica-se por vezes com dois pontos, um junto de cada bobina, qual o **sentido dos enrolamentos**. Os pontos indicam fluxos concordantes com as correntes a entrar.

Quando interessa indicar que o transformador tem **núcleo de ferro** representa-se o facto por meio de duas linhas paralelas entre o desenho das bobinas.

Se o transformador ideal se encontrar com o secundário ligado a uma resistência de carga  $R_L$ , esta é vista do lado do primário com tendo o valor

$$R_1 = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L \quad (2.151)$$

Esta expressão obtém-se directamente a partir das equações (2.149) e (2.150). Como casos particulares pode concluir-se o seguinte:

- Um curto-circuito no secundário ( $R_L = 0$ ) é equivalente a um curto-circuito no primário.
- O secundário em aberto é equivalente ao primário em aberto.

## 2.10. Circuitos trifásicos

### 2.10.1. Sistemas trifásicos

Designa-se por *sistema trifásico* todo aquele que é constituído por:

- Um gerador, que fornece três tensões (ou correntes) alternadas sinusoidais, com a mesma frequência, desfasadas de  $120^\circ$ .
- Um sistema de transporte dessas tensões e correntes.
- Consumidores de energia, capazes de utilizar uma ou as três fases.

O gerador, também designado por *alternador*, é na maior parte dos casos uma máquina eléctrica, com um rotor e um estator. O *rotor* contém os pólos magnéticos da máquina. Estes são conseguidos à custa de um enrolamento efectuado sobre um núcleo de ferro macio e percorrido por corrente contínua. As extremidades deste enrolamento ligam a dois anéis montados sobre o rotor, onde assentam duas escovas que permitem a ligação ao exterior. O rotor roda com uma velocidade angular  $\omega$  que, conjuntamente com o número de pares de pólos, define a frequência da tensão produzida no alternador.

O *estator* é constituído por 3 bobinas iguais e colocadas de modo a definirem 3 eixos magnéticos desfasados entre si de  $120^\circ$  no espaço, designadas por *fases*: fase 1, fase 2 e fase 3.

A forma dos pólos e o enrolamento das bobinas é tal que se consegue uma distribuição praticamente sinusoidal da indução magnética no entreferro. Repare-se que a linha de retorno é comum às 3 fases, por uma questão de economia de material.

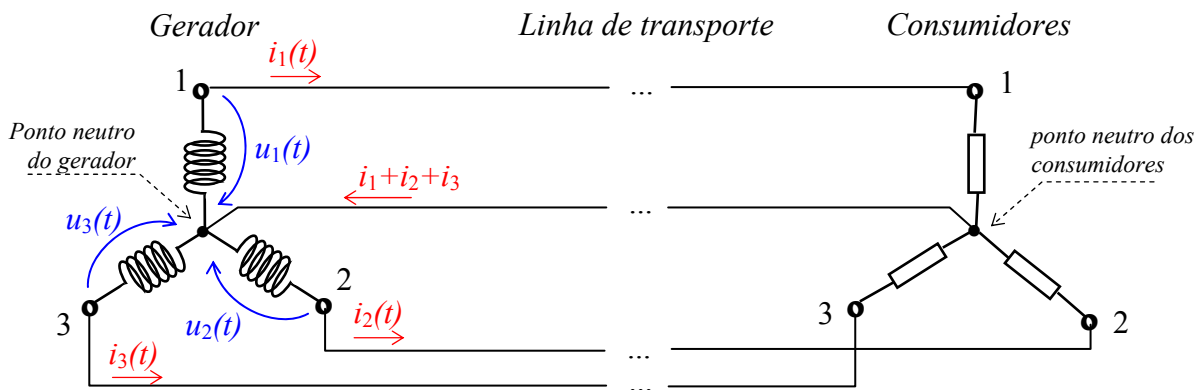


Fig. 2.26 – Representação de um sistema trifásico

### 2.10.2. Valores instantâneos

As tensões  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ , devido à constituição do gerador, tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1(t) = U_m \text{sen}(\omega t) \\ u_2(t) = U_m \text{sen}(\omega t - 2\pi/3) \\ u_3(t) = U_m \text{sen}(\omega t - 4\pi/3) \end{cases} \quad (2.152)$$

Admitindo que as cargas são iguais entre si (sistema equilibrado), as correntes nas linhas serão

$$\begin{cases} i_1(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \varphi - 2\pi/3) \\ i_3(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \varphi - 4\pi/3) \end{cases} \quad (2.153)$$

A representação gráfica destas correntes é a seguinte:

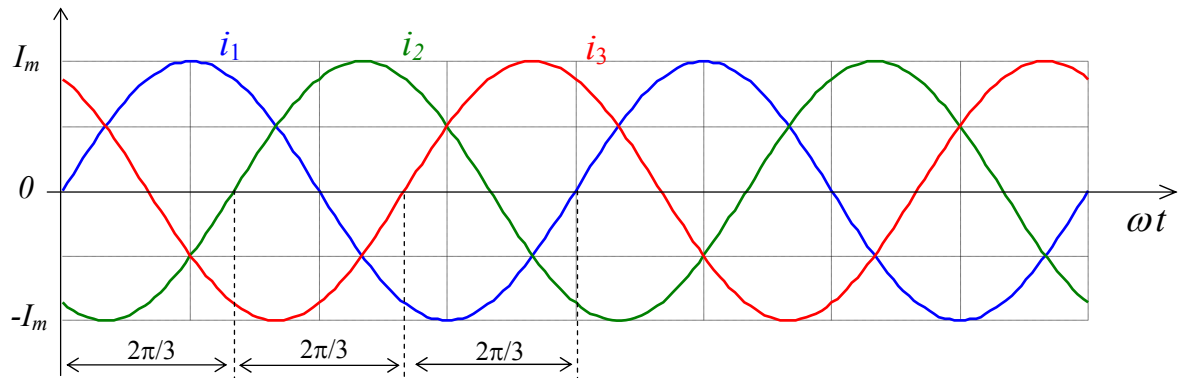


Fig. 2.27 – Correntes num sistema trifásico

O ponto comum onde são ligadas as 3 bobinas geradoras do alternador tem a designação de ponto **neutro** do gerador. O ponto comum da carga é denominado ponto neutro da carga (ou dos consumidores). O condutor de retorno das 3 correntes chama-se condutor neutro. Neste condutor vai circular uma corrente,  $i_N$ , dada por

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3 \quad (2.154)$$

A observação da Fig. 2.27, ou então um pequeno cálculo trigonométrico, mostra que a soma das 3 correntes é nula:  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ . Num sistema equilibrado **a corrente no condutor neutro é zero**. Então, e por uma questão de economia de material e de espaço, não se instala o condutor neutro. Fica-se assim com uma **distribuição a 3 fios**.

A forma como as bobinas do alternador estão ligadas tem o nome de **ligação em estrela**. Na Fig. 2.6 a carga também se encontra ligada em estrela.

### 2.10.3. Diagramas vectoriais

Tanto as tensões em cada uma das fases como as correntes nas linhas, uma vez que são grandezas alternadas sinusoidais, podem ser representadas por meio de um diagrama vectorial, como indicado na Fig. 2.28.

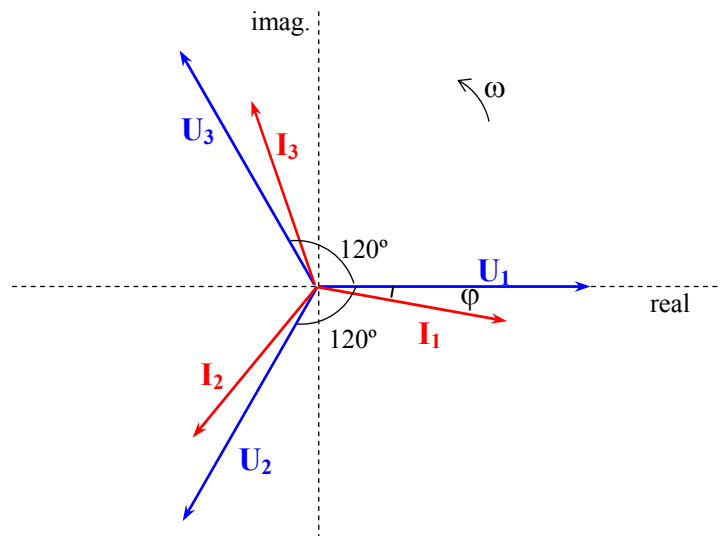


Fig. 2.28 – Diagrama vectorial das tensões e correntes

Trace-se o diagrama vectorial das tensões por fase e sobre ele o diagrama das tensões entre fases (Fig. 2.29). Num sistema trifásico as tensões geradas por fase são iguais em módulo. Consequentemente as tensões entre fases também são iguais em módulo. No entanto apresentam também entre si uma defasagem de  $120^\circ$ , como se observa da figura.

$$|U_{12}| = |U_2 - U_1| \quad |U_{23}| = |U_3 - U_2| \quad |U_{31}| = |U_1 - U_3| \quad (2.155)$$

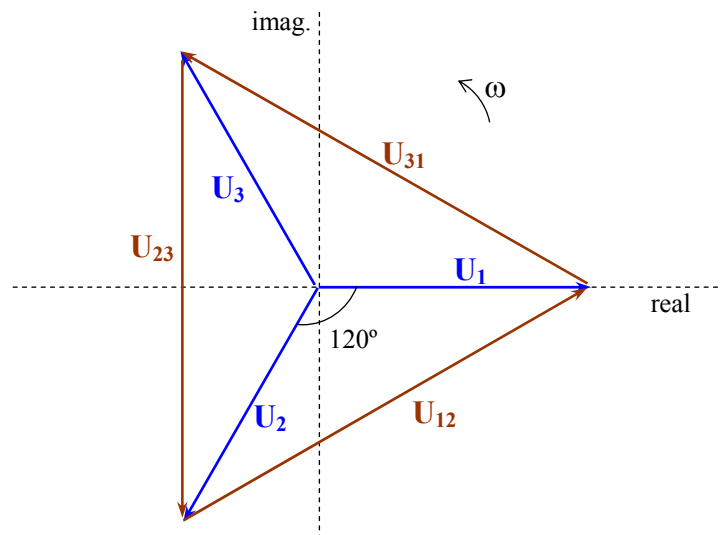


Fig. 2.29 – Tensões simples e compostas

Pela lei dos senos é  $U_{12} = \frac{\text{sen}120^\circ}{\text{sen}30^\circ} U_1$ , ou seja,

$$U_{12} = \sqrt{3} U_1 = 1,732 U_1 \quad (2.156)$$

As tensões  $U_{12}$ ,  $U_{23}$  e  $U_{31}$ , são as tensões entre fases. Quando as tensões simples são referidas a valores eficazes as tensões entre fases são também valores eficazes. Num sistema equilibrado toma o nome de **tensão composta**,  $U_{\Delta}$ .

Assim, para o caso da baixa tensão em que o valor eficaz da tensão simples é de 230 V, a tensão composta é  $U_{\Delta} = 230 \times 1,732 \text{ V} = 399,3 \text{ V}$ . Na baixa tensão, na Europa, o valor da tensão composta está normalizado em 400 V.

#### 2.10.4. Ligações em estrela e triângulo

Uma outra forma de efectuar as ligações é em triângulo. A ligação em triângulo pode ser efectuada tanto no gerador como no consumidor. Na Fig. 2.30 representa-se esquematicamente um sistema trifásico em que as bobinas do gerador estão ligadas em triângulo e a carga se encontra ligada em estrela.

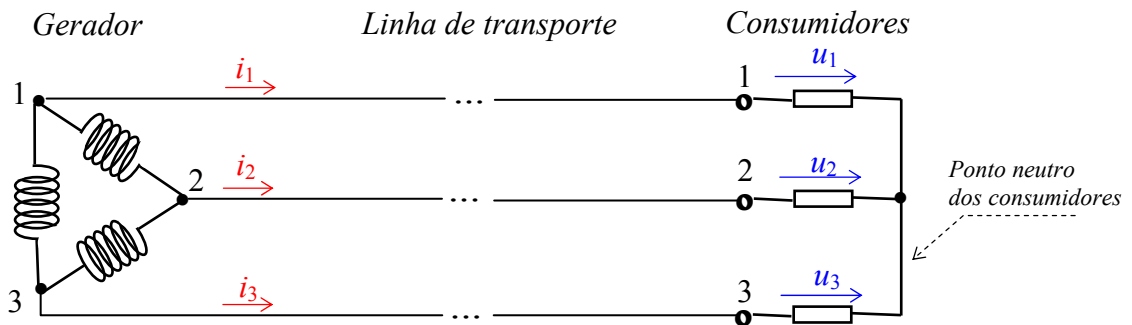


Fig. 2.30 – Gerador em triângulo, carga em estrela

A partir de um diagrama vectorial pode concluir-se que as correntes na linha constituem um sistema trifásico, com uma intensidade de corrente que é  $\sqrt{3}$  vezes maior do que a corrente nos enrolamentos do alternador.

Uma das aplicações muito vulgarizadas da ligação em estrela e em triângulo consiste no arranque de motores trifásicos com o chamado **arrancador estrela/triângulo**: ao ligar-se o motor à rede os seus enrolamentos são ligados em estrela. Cada enrolamento fica assim sujeito à tensão simples. Uns segundos após o arranque, quando o motor já ganhou alguma velocidade e a corrente de arranque diminuiu, o comutador passa a ligação das bobinas do motor a triângulo, ficando assim aplicada a cada bobina a tensão composta, maior que a tensão simples, recebendo o motor um acréscimo de potência. Uma das vantagens dos motores trifásicos é terem um binário de arranque elevado e de valor constante. Outra vantagem consiste na facilidade em inverter o sentido de rotação apenas por troca de duas fases. Cuidado, que esta troca só poderá efectuar-se depois de garantir a paragem prévia do motor.

## 2.11. Linha de transmissão

### 2.11.1. Descrição e caracterização

Uma linha eléctrica de transmissão é constituída por um dois ou mais condutores galvanicamente isolados uns dos outros.

A linha de transmissão é largamente utilizada na distribuição de energia eléctrica, em telecomunicações e em electrónica e computadores, pelo que a compreensão dos fenómenos que nela se passam é de grande importância nestes ramos de Engenharia. A linha constitui um sistema de parâmetros distribuídos.

Considere-se uma linha de transmissão *bifilar*, representada esquematicamente na Fig. 2.6. A linha é constituída por dois condutores paralelos e é caracterizada pelos seguintes parâmetros:

$R$  – resistência eléctrica dos condutores, por unidade de comprimento. Inclui a resistência dos condutores 1 e 2:  $R = R_1 + R_2$ .

$G$  – Condutância entre os dois condutores, por unidade de comprimento. Esta é devida ao facto do isolamento galvânico entre os condutores não ser perfeito.

$L$  – Coeficiente de auto-indução, por unidade de comprimento. É devido ao facto de existir um campo magnético entre os condutores, originado pelas correntes na linha.

$C$  – Capacidade eléctrica entre os condutores, por unidade de comprimento. É devida ao facto dos condutores em presença constituírem um condensador.

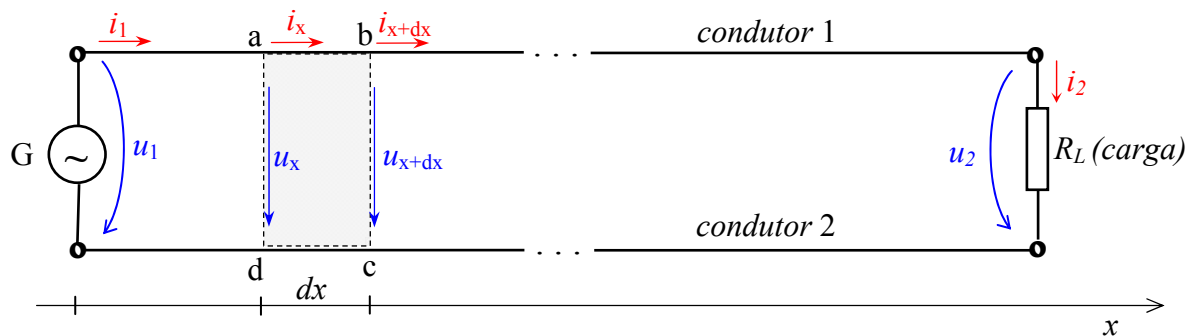


Fig. 2.31 – Linha de transmissão

### 2.11.2. Equações da linha bifilar

A aplicação das leis da indução e de ohm ao caminho fechado  $\widehat{abcd}$ , de comprimento elementar  $dx$ , conduz ao seguinte sistema de equações às derivadas parciais:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u_x}{\partial x} = Ri_x + L \frac{\partial i_x}{\partial t} & (2.157) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial i_x}{\partial x} = Gu_x + C \frac{\partial u_x}{\partial t} & (2.158) \end{cases}$$

A equação (2.157) indica que a queda de tensão ao longo da linha é devida ao facto desta possuir uma determinada resistência óhmica e também à existência de auto-indução. A equação (2.158) diz que a perda de corrente segundo o comprimento da linha é devida à falta de isolamento entre os condutores (condutância do isolamento) e ao efeito capacitivo.

Das equações (2.157) e (2.158) obtém-se a chamada **equação dos telegrafistas**, uma para a tensão, outra para a corrente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = RG u_x + (RC + GL) \frac{\partial u_x}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = RG i_x + (RC + GL) \frac{\partial i_x}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.159)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = RG u_x + (RC + GL) \frac{\partial u_x}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = RG i_x + (RC + GL) \frac{\partial i_x}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.160)$$

Considere-se o caso particular da **linha sem perdas** ( $R = 0$ ,  $G = 0$ ). Este caso constitui uma boa aproximação de muitos casos reais. Nestas condições as equações (2.159) e (2.160) transformam-se em

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.161)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i_x}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i_x}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (2.162)$$

As equações (2.161) e (2.162) representam a equação de Laplace<sup>19</sup> de propagação das ondas (a uma dimensão). Esta equação admite como solução uma **qualquer função** de  $x-vt$  e uma outra qualquer função de  $x+vt$ , como poderá comprovar-se por substituição em (2.161), em que  $v$  é dado por (2.165):

$$u_x = u_{xi}(x - vt) + u_{xr}(x + vt) \quad (2.163)$$

Existe uma equação análoga para a corrente, que devido aos sentidos arbitrados (tensões do condutor 1 para o condutor 2 e correntes da esquerda para a direita) se escreve

$$i_x = i_{xi}(x - vt) - i_{xr}(x + vt) \quad (2.164)$$

A equação (2.163) representa a **sobreposição de duas ondas**, uma onda incidente  $u_{xi}$  que se propaga segundo  $+x$  e uma onda reflectida  $u_{xr}$  que se propaga segundo  $-x$ . A **velocidade de propagação** de cada uma das ondas incidente e reflectida é dada por

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.165)$$

Pode mostrar-se que em qualquer ponto da linha a relação entre as ondas incidentes da tensão e da corrente é uma constante que depende dos parâmetros que caracterizam a linha. A essa constante,  $Z$ , dá-se o nome de **impedância característica** da linha:

<sup>19</sup> Pierre Simon Laplace, matemático, astrónomo e físico francês, 1749-1827.

$$\frac{u_{xi}}{i_{xi}} = \frac{u_{xr}}{i_{xr}} \equiv Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.166)$$

Quando não há onda reflectida a impedância característica é igual a  $\frac{u_x}{i_x}$ , em qualquer ponto  $x$ , pelo que também é igual a  $u_1/i_1$ . Atendendo a (2.164) e a (2.166) vem

$$i_x = i_{xi} - i_{xr} = \frac{u_{xi}}{Z} - \frac{u_{xr}}{Z} \quad (2.167)$$

### 2.11.3. Factor de reflexão

Considerem-se agora os casos seguintes, em que a linha está terminada por diversas resistências de carga,  $R_L$ .

#### 2.11.3.1. Linha em vazio

Neste caso é  $R_L = \infty$ . Não há corrente no fim da linha, ou seja,  $i_2 = 0$ . A partir de (2.167) obtém-se  $i_2 = i_{2i} - i_{2r} = 0$ . A tensão no fim da linha será

$$u_2 = u_{2i} + u_{2r} = 2u_{2i} \quad (2.168)$$

Aparece assim uma sobretensão no fim da linha, que é igual ao dobro da tensão incidente.

#### 2.11.3.2. Linha em curto-circuito

Neste caso é  $R_L = 0$ . Não há tensão no fim da linha, ou seja,  $u_2 = 0$ , donde  $u_{2r} = -u_{2i}$ . A corrente no fim da linha é dada por  $i_2 = \frac{u_{2i}}{Z} - \frac{u_{2r}}{Z} = 2\frac{u_{2i}}{Z}$ . Existe uma sobre-corrente no fim da linha, dupla da corrente incidente.

#### 2.11.3.3. Linha ligada sobre uma resistência

Neste caso é  $u_2 = R_L i_2$ . Como  $u_2 = u_{2i} + u_{2r}$  vem

$$R_L i_2 = u_{2i} + u_{2r} \quad (2.169)$$

Mas como  $i_2 = \frac{u_{2i}}{Z} - \frac{u_{2r}}{Z}$  vem

$$i_2 Z = u_{2i} - u_{2r} \quad (2.170)$$

As equações (2.169) e (2.170) conduzem a

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2i} = \frac{i_2(R_L + Z)}{2} \end{array} \right. \quad (2.171)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{2r} = \frac{i_2(R_L - Z)}{2} \end{array} \right. \quad (2.172)$$

À relação entre a amplitude onda reflectida e a da onda incidente dá-se o nome de **factor de reflexão** no fim da linha,  $p$ . Utilizando esta definição e as expressões (2.171) e (2.172) pode escrever-se

$$\frac{u_{2r}}{u_{2i}} \equiv p = \frac{R_L - Z}{R_L + Z} \quad (2.173)$$

Para que não exista reflexão deverá ser  $p = 0$ , o que implica  $R_L = Z$ . Diz-se então que a linha se encontra **adaptada**.

Para os casos particulares estudados tem-se para valores de  $p$ :

- Linha em vazio.  $R_L = \infty \rightarrow p = 1$ .
- Linha em curto-circuito.  $R_L = 0 \rightarrow p = -1$ .
- Linha adaptada.  $R_L = Z \rightarrow p = 0$ .

No caso de a linha ter perdas a impedância característica deixa de ser real. Para tensões alternadas sinusoidais será um número complexo, que depende da frequência:

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (2.174)$$

Há ainda um caso, importante na transmissão de sinais analógicos, designado por linha sem distorção. A condição de não distorção é

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \equiv \delta \quad (2.175)$$

Para este caso, a integração das equações dos telegrafistas conduz a

$$\begin{cases} u(x, t) = e^{-\delta t} [u_{xi}(x - vt) + u_{xr}(x + vt)] \\ i(x, t) = \frac{e^{-\delta t}}{Z} [u_{xi}(x - vt) - u_{xr}(x + vt)] \end{cases} \quad (2.176)$$

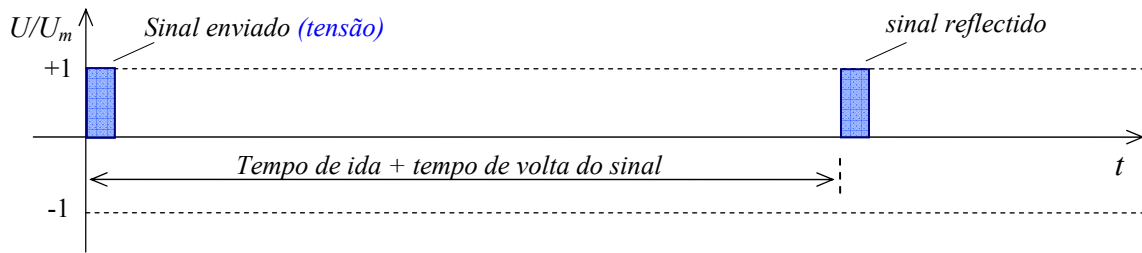
$$(2.177)$$

com  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$  e  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

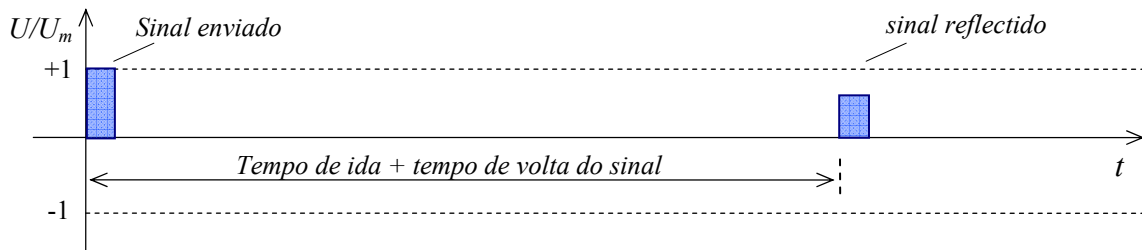
#### 2.11.4. Propagação de impulsos numa linha

Considere-se um gerador de **impulsos de tensão** ligado a uma linha de transmissão bifilar com uma impedância característica  $Z$ . O gerador tem impedância de saída igual a  $Z$ . Os impulsos provenientes do gerador  $G$  propagam-se ao longo da linha. A linha está terminada por uma resistência  $R_L$ . Consoante a relação entre a impedância característica e a resistência de carga, caracterizada pelo factor de reflexão  $p$  definido em (2.173), assim o impulso de **tensão** reflectido será direito ou invertido ou não haverá reflexão, como se indica a seguir.

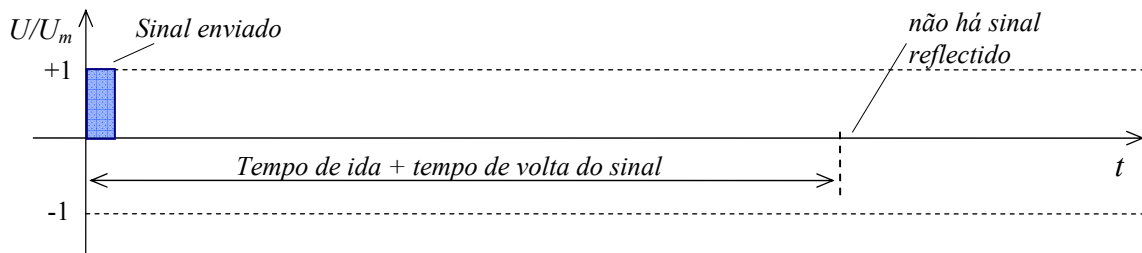
1. Linha em vazio.  $R_L = \infty \rightarrow p = 1$ .



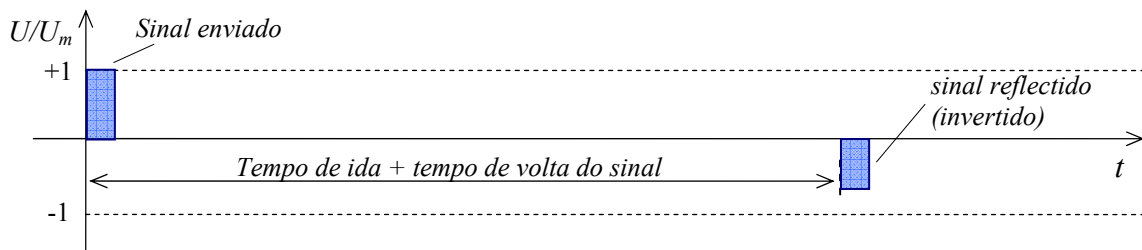
2.  $Z < R_L < \infty \rightarrow 0 < p < 1$ .



3. Linha adaptada:  $R_L = Z \rightarrow p = 0$



4.  $0 < R_L < Z \rightarrow -1 < p < 0$ .



5. Linha em curto-circuito.  $R_L = 0 \rightarrow p = -1$ .

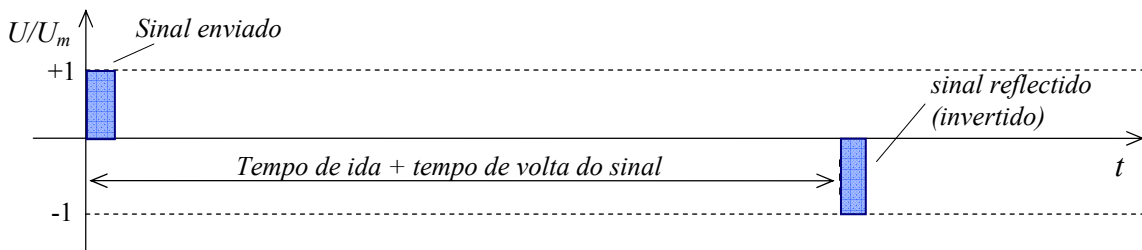


Fig. 2.32 – Propagação de impulsos numa linha de transmissão sem perdas

## 2.12. Problemas resolvidos

### 2.12.1. Problema 2. 1 – Cálculo do número de cargas

Considere um alfinete de gravata, de ouro, com a massa de 8 gramas.

- Calcule o número de electrões livres nele existentes, se estiver electricamente descarregado.
- Carregou-se o alfinete com uma carga eléctrica, de electrões, de  $500 \mu\text{C}$ . Quantos electrões se juntaram ao alfinete? Qual o seu número por milhão de electrões previamente existentes?

*RESOLUÇÃO:*

O problema resolve-se recorrendo ao conhecimento da estrutura molecular do ouro e ao conceito de molécula-grama. O ouro, Au, é um elemento. Da tabela periódica obtém-se o seu número atómico,  $Z = 79$ , e a sua massa atómica  $u = 196,967$ . Assim,

- Uma mole (molécula-grama) de ouro contém a massa de  $196,967 \text{ g}$ . Mas uma molécula-grama, qualquer que ela seja, contém sempre  $N_A$  moléculas ( $N_A$  é o número de Avogadro,  $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ). No alfinete de ouro, com a massa de  $8 \text{ g}$ , há um número de átomos (por ser um elemento),  $n_a$ :

$$n_a = \frac{8}{196,967} \times 6,022 \times 10^{23} = 24,46 \times 10^{21} \text{ átomos}$$

Pela estrutura do átomo de ouro, há apenas um electrão de valência. Considerando apenas estes electrões, o seu número em  $8 \text{ g}$  de ouro será  $n_{ev} = 24,46 \times 10^{21}$  electrões de valência.

- O número de electrões existentes em  $500 \mu\text{C}$  será  $n = \frac{Q}{e}$ , em que  $e$  é a carga do electrão.

$$\text{Logo } n = \frac{500 \times 10^{-6}}{1,602177 \times 10^{-19}} = 3,1208 \times 10^{15}.$$

Expresso em partes por milhão dos electrões existentes no alfinete de  $8 \text{ g}$  será

$$n = \frac{3,1208 \times 10^{15}}{24,46 \times 10^{21}} \times 10^6 \text{ ppm} = 0,128 \text{ ppm}.$$

### 2.12.2. Problema 2. 2 – Força eléctrica e gravítica

Um núcleo de Hélio é constituído por 2 protões e por dois neutrões (distância entre estas partículas  $3,80 \times 10^{-10} \text{ m}$ ).

- Calcule a força eléctrica de Coulomb que se exerce entre aquelas partículas.
- Calcule a força gravítica entre elas e compare com os valores obtidos para as forças eléctricas.

*RESOLUÇÃO:*

O problema resolve-se recorrendo à lei de Coulomb e à lei da atracção universal. (Note-se que não são apenas estas forças as existentes a nível atómico).

a) Só há força de Coulomb entre os 2 protões:

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8,9875 \times 10^9 \times \frac{(1,602 \times 10^{-19})^2}{(3,80 \times 10^{-10})^2} = 1,5977 \times 10^{-9} \text{ N}$$

b) Há as forças gravíticas seguintes:

- entre os 2 protões,  $F_{pp}$ ; entre os dois neutrões,  $F_{nn}$ ; entre o protão e o neutrão,  $F_{pn}$

$$F_{pp} = G \frac{m_p m_p}{r^2} = 6,672 \times 10^{-11} \times \frac{1,672 \times 10^{-27} \times 1,672 \times 10^{-27}}{(3,80 \times 10^{-10})^2} = 1,293 \times 10^{-45} \text{ N}$$

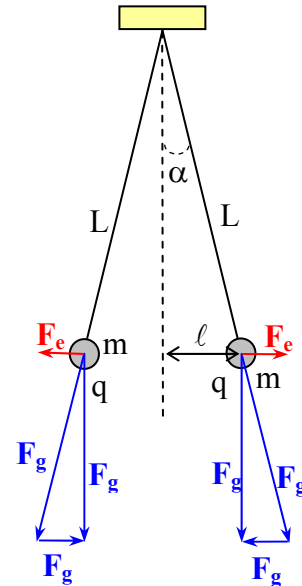
Compare-se a ordem de grandeza deste valor com a ordem de grandeza da força de Coulomb, obtida na alínea a).

As restantes forças,  $F_{nn}$  e  $F_{pn}$  são quase iguais a  $F_{pp}$ , uma vez que  $m_n = 1,674 \times 10^{-27} \text{ kg}$  é praticamente igual a  $m_p$ .

### 2.12.3. Problema 2. 3 – Forças e medição da carga eléctrica

Considere um sistema constituído por duas esferas metálicas iguais suspensas de um suporte isolante por meio de um fio condutor, como se mostra na figura ao lado. As esferas, que inicialmente se encontravam electricamente neutras, foram carregadas com uma determinada quantidade de electricidade  $Q$  (distribuída igualmente pelas duas esferas). Nestas condições determine

- O valor de  $Q$  que conduz ao afastamento entre as esferas de  $20^\circ$ , para  $L = 16 \text{ cm}$  e  $m = 5 \text{ g}$ .
- Para o comprimento  $L = 25 \text{ cm}$  qual deverá ser a massa de cada esfera de modo que para  $Q = 1 \text{ } \mu\text{C}$  se tenha  $\alpha = 8^\circ$
- Nas condições da alínea anterior, e aproximando o seno e a tangente pelo seu argumento, estabeleça uma expressão  $Q(\alpha)$ , com  $\alpha$  expresso em graus e  $Q$  em microcoulomb.
- Este dispositivo pode ser utilizado para medir carga eléctrica. Existe linearidade entre a variável que se mede e a saída do aparelho?



Dados: Constante de Coulomb,  $k_e = 8,987 5 \times 10^9 \text{ C}^{-2}\text{Nm}^2$  (exacto), Aceleração da gravidade,  $g = 9,802 \text{ m/s}^2$ .

**RESOLUÇÃO:**

- As esferas são iguais. Cada uma delas encontra-se sujeita a duas forças: a força eléctrica de repulsão,  $F_e$ , igual nas duas esferas mas de sentido contrário, e a força gravítica,  $F_g$ , que é igual nas duas esferas porque as suas massas são iguais. Pela lei de Coulomb a força eléctrica que se exerce entre as esferas é repulsiva (corpos com carga do mesmo sinal) e dada por

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Mas como  $q_1 = q_2 = Q/2$  e  $r = 2\ell = 2L \text{ sen } \alpha$  vem, substituindo na equação anterior

$$F_e = k_e \frac{Q^2}{16L^2 \sin^2 \alpha}$$

A força gravítica em cada esfera pode ser decomposta numa componente na direcção do fio de suspensão (que não produz movimento) e noutra com a direcção da força eléctrica

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_{gt} + \mathbf{F}_{gx}$$

Pode escrever-se  $F_{gx} = F_g \tan \alpha = mg \tan \alpha$

As esferas estarão em equilíbrio quando  $F_e + F_{gx} = 0$ , ou ainda, quando  $F_e = F_{gx}$ . Será então

$$k_e \frac{Q^2}{16L^2 \sin^2 \alpha} = mg \tan \alpha \quad (\text{eq. 1}) \quad \rightarrow \quad Q^2 = \frac{16L^2 mg \sin^2 \alpha \tan \alpha}{k_e} \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo valores numéricos obtém-se  $Q = 0,109 \mu\text{C}$ .

- b) Usando de novo a eq. 1, mas com os novos valores numéricos e resolvendo em ordem a  $m$ :

$$m = k_e \frac{Q^2}{16L^2 g \sin^2 \alpha \tan \alpha} \rightarrow m = 0,3369 \text{ kg.}$$

- c) Para  $\alpha = 8^\circ$  tem-se:

$\alpha$ (°)	$\alpha$ (rad)	$\tan \alpha$	$\tan \alpha - \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha - \alpha$
8	0,13963	0,14054	0,00091	0,13917	0,00045

Vê-se assim que, a menos das diferenças indicadas, é lícito substituir  $\sin \alpha$  e  $\tan \alpha$  por  $\alpha$ . Nestas condições a equação 2 escreve-se

$$Q^2 = \frac{16L^2 mg \alpha^3}{k_e} \rightarrow Q^2 = \frac{10^{12} \times 16L^2 mg}{k_e} \left( \frac{\pi}{180} \right)^3 \alpha^3 \quad (\text{com } Q \text{ em } \mu\text{C} \text{ e } \alpha \text{ em graus}),$$

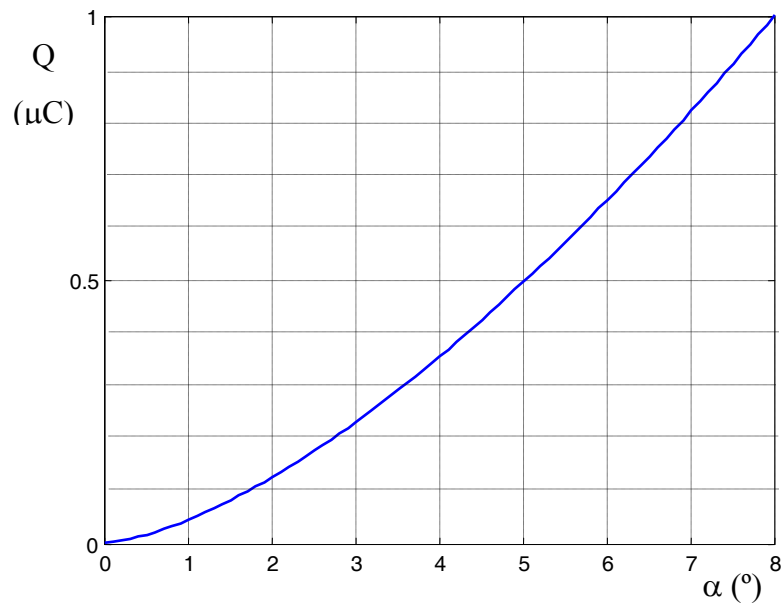
ou ainda,

$$Q = \sqrt{\frac{10^{12} \times 16L^2 mg}{k_e} \left( \frac{\pi}{180} \right)^3} \alpha^{3/2}.$$

Substituindo valores numéricos vem  $Q = 0,04419 \alpha^{3/2}$  (eq. 3)

que se encontra representado na figura da pág. seguinte.

- d) A observação da figura, ou então da equação 3, mostram que não existe linearidade entre a saída do aparelho ( $\alpha$ ) e a sua entrada ( $Q$ ). A sensibilidade deste dispositivo é tanto maior quanto menor o ângulo (note-se que a sensibilidade é dada pela relação entre a variação da saída e a variação na entrada).



#### 2.12.4. Problema 2. 4 – Dipolo eléctrico

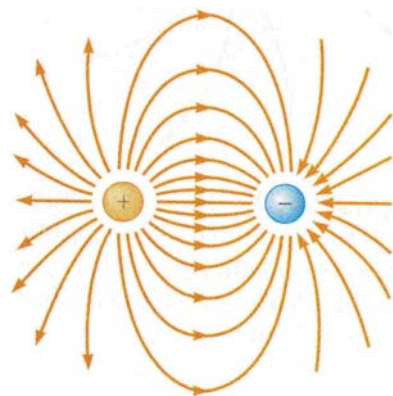
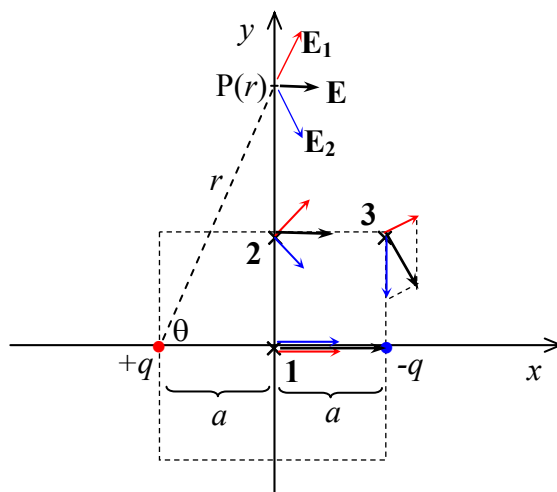
Um dipolo eléctrico é constituído por duas cargas com a mesma grandeza mas sinais contrários, colocadas a distância fixa uma da outra,  $2a$ .

- Faça uma representação gráfica aproximada do campo eléctrico originado pelo dipolo.
- Determine analiticamente o campo do dipolo num ponto equidistante das cargas a uma distância  $r$  do seu centro tal que  $r \gg a$ .

**RESOLUÇÃO:**

O problema resolve-se utilizando a lei de Coulomb e a simetria aqui existente na distribuição do campo eléctrico.

- Considere-se um plano significativo, um plano contendo as cargas, e definam-se os eixos coordenados como indicado na figura da esquerda.



Nesse plano considerem-se, para efeitos de cálculo, apenas os pontos do 1º quadrante. Os resultados para os outros quadrantes obtêm-se por simetria. Para os pontos 1, 2, 3 está indicado o campo eléctrico devido à carga  $+q$ , devido a  $-q$  e a resultante. Note-se que os módulos são diferentes devido às distâncias não serem iguais. Quando o mesmo para um grande número de pontos e traçando as linhas tangentes ao campo eléctrico, obtêm-se a figura apresentada à direita.

- b) A posição do ponto  $P(r)$ , de acordo com o enunciado, é sobre o eixo dos  $yy$ . Sobre este eixo o campo é dirigido da esquerda para a direita, sendo a soma de  $\mathbf{E}_1$  (devido a carga  $+q$ ) e de  $\mathbf{E}_2$ . Em módulo estes dois campos são iguais:

$$E_1 = E_2 = k_e \frac{q}{r^2} = k_e \frac{q}{y^2 + a^2}$$

Mas da figura conclui-se que  $E = 2E_1 \cos \theta$ . Mas  $\cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$ , pelo que fica

$$E = 2E_1 \cos \theta = 2k_e \frac{q}{y^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} = k_e \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para distâncias tais que  $y \gg r$  a expressão anterior resulta em  $E \approx k_e \frac{2qa}{y^3}$

### 2.12.5. Problema 2. 5 – Carga sujeita a força eléctrica

Uma partícula em repouso, com carga eléctrica  $+q$  e massa  $m$ , é submetida a um campo eléctrico  $E$ , constante e uniforme, dirigido segundo o eixo dos  $xx$ .

- Determine a sua lei de movimento (aceleração, velocidade e trajectória).
- Particularize para o movimento do protão e determine a sua velocidade, depois de ter percorrido uma distância  $d = 10$  cm num campo eléctrico uniforme  $E = 100$  kV/m. Qual o tempo que o protão demorou a efectuar a trajectória?
- Calcule a energia cinética do protão, depois de ter sido acelerado durante o tempo calculado na alínea b). De onde proveio esta energia?

*RESOLUÇÃO:*

- a) Uma partícula de carga  $q$  quando colocada num campo eléctrico  $\mathbf{E}$  fica sujeita à força  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Pela 2ª lei de Newton, uma partícula de massa  $m$  sujeita a forças adquire

uma aceleração  $\mathbf{a}$  tal que  $\mathbf{a} = \frac{\sum \mathbf{F}^{ext}}{m}$ , ou seja, como neste caso  $\sum \mathbf{F}^{ext} = q\mathbf{E}$ , vem

$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E}$ . Como  $\mathbf{E}$  apenas tem componente segundo o eixo dos  $xx$ , o mesmo acontecerá a  $\mathbf{a}$ , pelo que podemos escrever apenas os módulos:  $a = \frac{q}{m} E$ .

A velocidade será dada por  $v = \int_0^t a dt = \frac{qE}{m} \int_0^t dt$  ( $q$ ,  $a$  e  $E$  são constantes).  $\rightarrow$

$v = \frac{qE}{m} t$ . (a partícula estava inicialmente em repouso).

A posição é dada por  $x = \int_0^t v dt = \frac{qE}{m} \int_0^t t dt \rightarrow x = \frac{qE}{2m} t^2$ . (a partícula partiu de  $x = 0$ ).

b)  $a = \frac{q}{m} E = \frac{1,6022 \times 10^{-19}}{1,6726 \times 10^{-27}} \times 100 \times 10^3 \text{ m/s}^2 = 9,5788 \times 10^{12} \text{ ms}^{-2}$ .

$x = \frac{qE}{2m} t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{\frac{qE}{m}} x} = \sqrt{\frac{2}{9,5788 \times 10^{12}} \times 0,1} \text{ s} = 0,1445 \mu\text{s}$ . Ao fim deste tempo

a velocidade será  $v = \frac{qE}{m} t = 9,5788 \times 10^{12} \text{ ms}^{-2} \times 0,1445 \mu\text{s} = 1,3841 \times 10^6 \text{ m/s}$ .

c) Energia cinética:  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 1,6726 \times 10^{-27} \times 1,3841 \times 10^6 \text{ J} = 1,6021 \times 10^{-15} \text{ J}$

Esta energia provém da fonte de alimentação que assegura a diferença de potencial entre as armaduras constante, e é transformada em energia cinética.

### 2.12.6. Problema 2. 6 – Campo eléctrico de uma carga

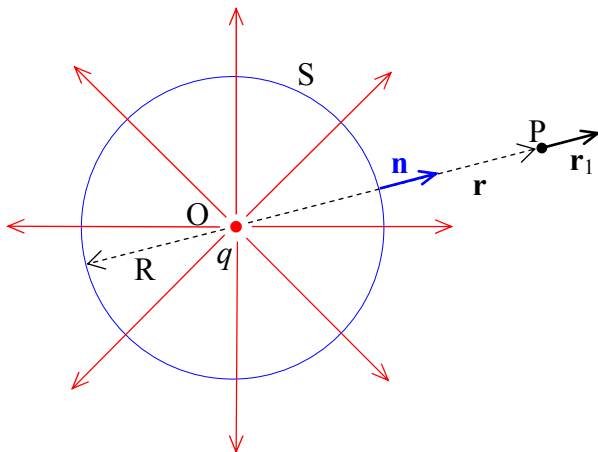
Uma carga pontual encontra-se envolvida por uma superfície esférica (geométrica) de raio  $R$ .

- Calcule o campo eléctrico produzido por esta carga, sobre esta esfera.
- A partir do campo eléctrico obtido em a) determine o seu fluxo através da mesma superfície.
- Comprove o valor obtido aplicando a lei de Gauss do campo eléctrico.
- Faça uma aplicação numérica, calculando o campo eléctrico e o seu fluxo para  $q = 1 \text{ nC}$  e  $R = 10 \text{ cm}$ .

**RESOLUÇÃO:**

- Uma carga eléctrica colocada num ponto  $O$  do espaço, sem mais nada em presença, origina num ponto  $P$ , à distância  $r$  de  $O$ , um campo eléctrico radial, dado pela lei de Coulomb:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_1$$



em que  $\mathbf{r}_1$  é o vector unitário dirigido da carga para o ponto  $P$ . Graficamente será:

Para os pontos sobre a superfície da esfera será

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{r}_1$$

O módulo de  $\mathbf{E}$  é constante e a sua direcção radial, com origem em  $O$ .

- b) O fluxo é calculado a partir de  $\phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  em que o integral se estende a toda a superfície da esfera (fechada),  $\mathbf{n}$  representa a normal à superfície e  $\sigma$  o elemento de área infinitesimal sobre a superfície. Substituindo o valor de  $\mathbf{E}$  obtido, e como em qualquer ponto  $\mathbf{E}$  é paralelo a  $\mathbf{n}$  vem

$$\begin{aligned} \phi_E &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \oiint_S \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \oiint_S d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} S = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

- c) A lei de Gauss afirma o seguinte:

*O fluxo total do campo eléctrico através de uma superfície fechada, é proporcional à quantidade de carga eléctrica resultante, existente no interior dessa superfície.*

Analiticamente esta lei exprime-se do seguinte modo:  $\phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\epsilon} Q$ .

Como  $Q = q$ , vem  $\phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$

d)  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} = k_e \frac{q}{R^2} = 8,987 \times \frac{1 \times 10^{-9}}{0,1^2} \text{ V/m} = 889 \text{ V/m}$

$$\phi_E = \frac{1 \times 10^{-9}}{8,854 \times 10^{-12}} \text{ Vm} = 113 \text{ Vm}$$

### 2.12.7. Problema 2. 7 – Potencial de uma carga

Em relação ao problema anterior,

- Calcule o potencial num ponto P à distância  $r$  da origem.
- Represente graficamente  $U(r)$ .

*RESOLUÇÃO:*

- a) Utilizando a definição de potencial tem-se

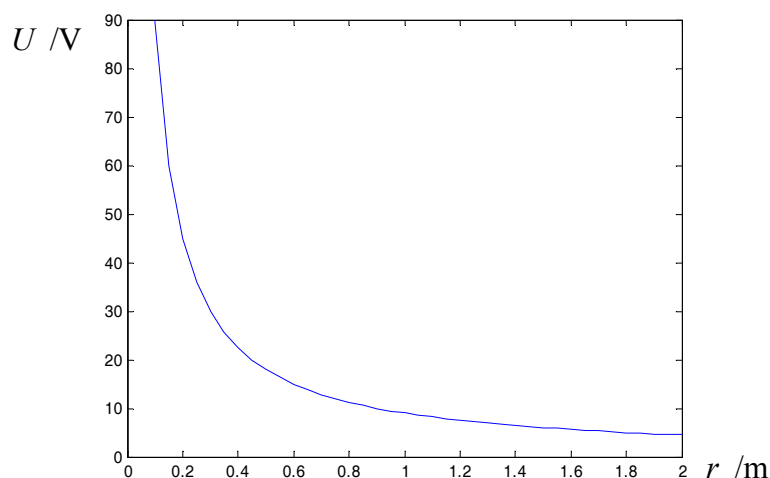
$$U_P = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Em que  $E = k_e \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_1$  e  $d\mathbf{s} = dr \mathbf{r}_1$ . Logo, fica  $U_P = -\int_{\infty}^P k_e \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_1 \cdot dr \mathbf{r}_1 = U_P = -k_e q \int_{\infty}^P \frac{dr}{r^2}$

Como o ponto P se encontra referenciado pela distância à origem,  $r$ , resulta

$$U(r) = -k_e q \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{q}{r}$$

- b) A representação gráfica do potencial decorre da expressão obtida (pág. seguinte).



### 2.12.8. Problema 2. 8 – Potencial de uma esfera isolante

Uma determinada carga eléctrica  $Q$  encontra-se uniformemente distribuída no interior de uma esfera isolante de raio  $a$ . Com o auxílio da lei de Gauss do campo eléctrico calcule:

- O campo eléctrico no seu exterior e no seu interior.
- O potencial eléctrico criado por esta distribuição de cargas.
- Represente graficamente o módulo de  $\mathbf{E}$  em função da distância  $r$  ao centro da esfera, para  $r \in [0, \infty]$ . Represente também  $U(r)$ .

**RESOLUÇÃO:**

- O campo eléctrico obtém-se com o auxílio do teorema de Gauss:

$$\phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}. \text{ Devido à simetria na distribuição geométrica das cargas, o}$$

campo eléctrico em qualquer ponto (devido à sobreposição dos campos produzidos pelas cargas individuais) é radial, dirigido da origem da esfera para o exterior.

O campo eléctrico é de módulo constante sobre qualquer esfera centrada em O. Na expressão anterior pode então passar-se  $E$  para fora do integral, resultando

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = ES, \text{ pelo que } ES = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

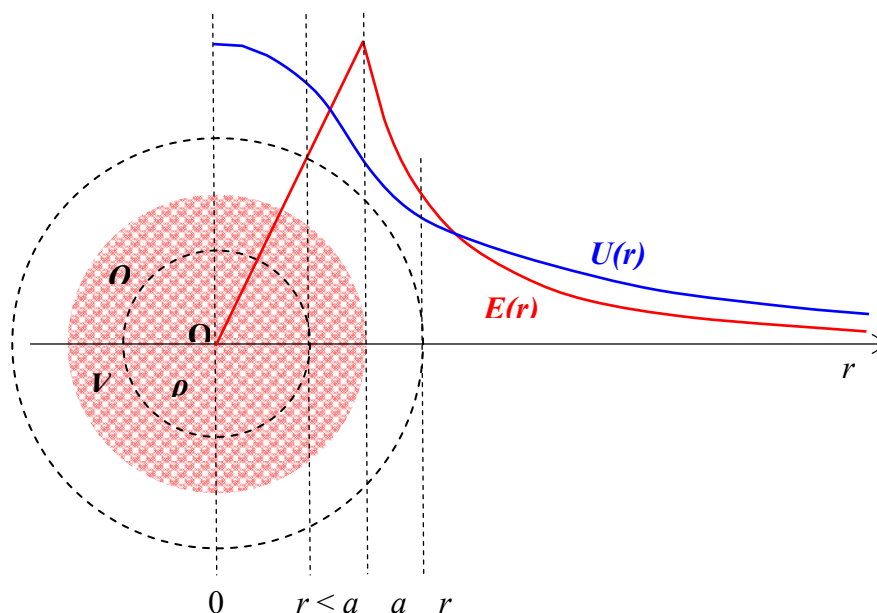
$$\text{Uma vez que } S = 4\pi r^2, \text{ vem } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{int}}}{r^2}$$

Considerem-se agora dois casos:

- $r > a$  : Neste caso  $Q_{\text{int}} = Q$  e fica

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

- $0 < r < a$  : Neste caso  $Q_{\text{int}} = \rho V_{\text{int}}$ ; sendo  $\rho$  a densidade de carga em volume.  $\rho$  calcula-se dividindo a carga eléctrica existente na esfera de raio  $a$  pelo seu volume, uma vez que a distribuição é uniforme, donde



$$Q_{\text{int}} = Q \frac{r^3}{a^3}. \text{ Fica pois } ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{a^3} \text{ ou } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} r.$$

b) O potencial eléctrico obtém-se por:  $U_p = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ . Considerem-se os 2 casos anteriores:

1.  $r > a$ : vem, considerando de novo que P é caracterizado pela distância  $r$ ,

$$U(r) = -\int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

$$2. 0 < r < a: U(r) = -\int_{\infty}^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr - \int_a^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_a^r =$$

$$\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \left( 3 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

c) A representação gráfica do campo eléctrico e do potencial em função da distância ao centro da esfera encontra-se sobre a própria figura, respectivamente a vermelho e a azul.

### 2.12.9. Problema 2. 9 – Potencial de uma esfera condutora

Uma carga eléctrica  $Q = 5 \text{ nC}$  encontra-se distribuída numa esfera condutora de raio  $a = 20 \text{ cm}$ .

- Calcule a densidade de carga eléctrica à superfície da esfera.
- Determine o campo eléctrico no seu exterior e no seu interior.
- Calcule o potencial eléctrico criado por esta distribuição de cargas.
- Represente graficamente o módulo de  $\mathbf{E}$  em função da distância  $r$  ao centro da esfera, para  $r \in [0, \infty]$ . Represente também  $U(r)$ .

**RESOLUÇÃO:**

a) Sendo a esfera condutora (perfeita) as cargas distribuem-se à sua superfície. Por definição a densidade superficial de carga é dada por  $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ . Como a superfície é esférica as cargas encontram-se uniformemente distribuídas sobre ela, pelo que se pode pôr

$$\sigma = \frac{Q}{S} \rightarrow \sigma = \frac{5 \times 10^{-9}}{4 \times \pi \times 0,2^2} \text{ C/m}^2 = 9,945 \text{ } \mu\text{C/m}^2$$

b) O campo eléctrico pode obter-se pelo teorema de Gauss. No exterior da esfera (ver problema anterior) será, usando  $k_e$  em vez de  $1/4\pi\epsilon_0$ ,  $E = k_e \frac{Q}{r^2}$ , (com  $r = a$ ),  $\rightarrow$

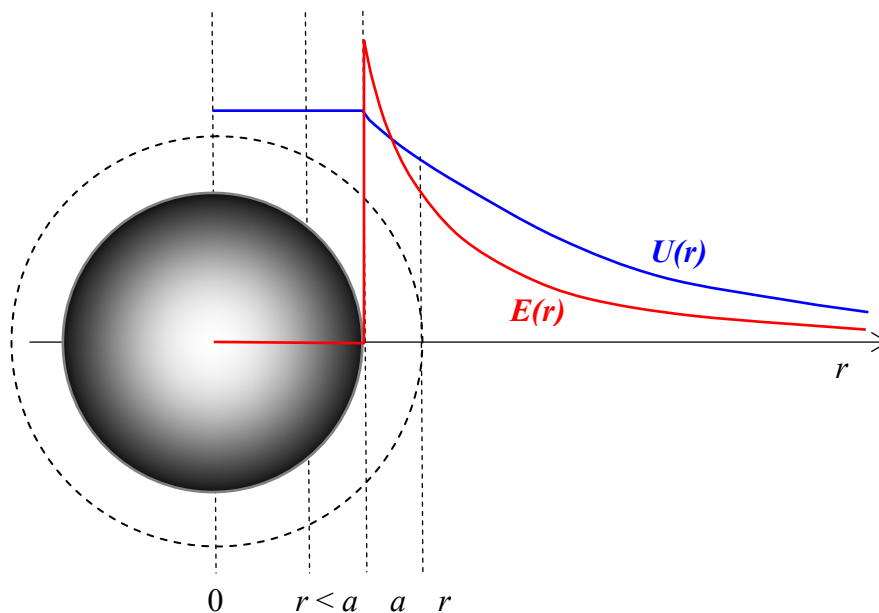
$$E = 8,987 \times 10^9 \times \frac{5 \times 10^{-9}}{0,2^2} \text{ V/m} = 1123 \text{ V/m.}$$

No interior da esfera não há cargas eléctricas, pelo que usando o teorema de Gauss  $E = 0$ .

c) No exterior da esfera (ver problema anterior) será  $U = k_e \frac{Q}{a} \rightarrow U = 225 \text{ V}$ .

No interior, como não há cargas interiores (ver problema anterior b) 2), o 2º integral constituinte de  $U(r)$  é zero pelo que o potencial se mantém constante e igual a  $U(a) = 225 \text{ V}$ .

d) Representação gráfica de  $E(r)$  e  $U(r)$ :



**2.12.10. Problema 2. 10 – Potencial de 2 esferas concêntricas**

Uma carga eléctrica  $Q$  encontra-se uniformemente distribuída em volume no interior de uma esfera isolante de raio  $a$ . A envolver esta esfera encontra-se uma esfera condutora, oca e espessa, de diâmetro interno  $b$  e diâmetro externo  $c$ .

- Calcule o campo eléctrico nas regiões  $0 \leq r \leq a$ ,  $a \leq r \leq b$ ,  $b \leq r \leq c$  e  $r \geq c$ .
- Determine o valor da carga eléctrica induzida nas superfícies interior e exterior da esfera oca.

**RESOLUÇÃO:**

- Escolha-se, para simplificar, como superfície gaussiana esférica, concêntrica com a esfera de raio  $a$ . Seja  $r$  o seu raio. O campo eléctrico é perpendicular a esta superfície gaussiana e tem um módulo constante sobre ela (porquê?).

Densidade de carga no interior da esfera de raio  $a$ :

$$\rho = \frac{Q}{V_a} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

Pelo teorema de Gauss:  $\phi_E = \frac{q}{\epsilon}$

A partir da definição de fluxo  $\phi_E = 4\pi r^2 E$

- $r < a$ . Carga no interior da esfera gaussiana:

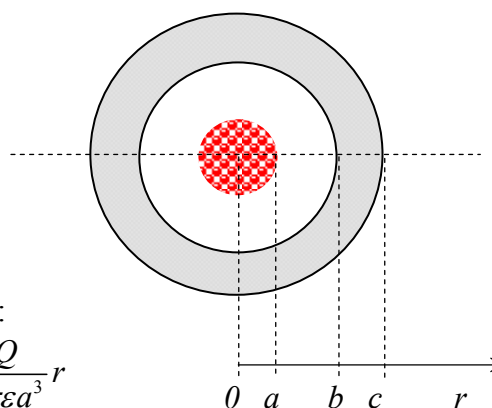
$$q = \rho V_r = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{a^3} \quad E = \frac{q/\epsilon}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon a^3} r$$

- $a < r < b$ . Carga no interior da esfera gaussiana:  $q = Q \rightarrow E = \frac{Q/\epsilon}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$

- $b < r < c$ . Carga no interior da esfera gaussiana:  $q = 0$  (porquê?)  $\rightarrow E = 0$

- $r > c$ . Carga no interior da esfera gaussiana:  $q = Q \rightarrow E = \frac{Q/\epsilon}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$

- As cargas movem-se livremente na esfera condutora. A sua carga eléctrica total é nula. A carga na superfície interior é  $-Q$  e na superfície exterior é  $+Q$ .

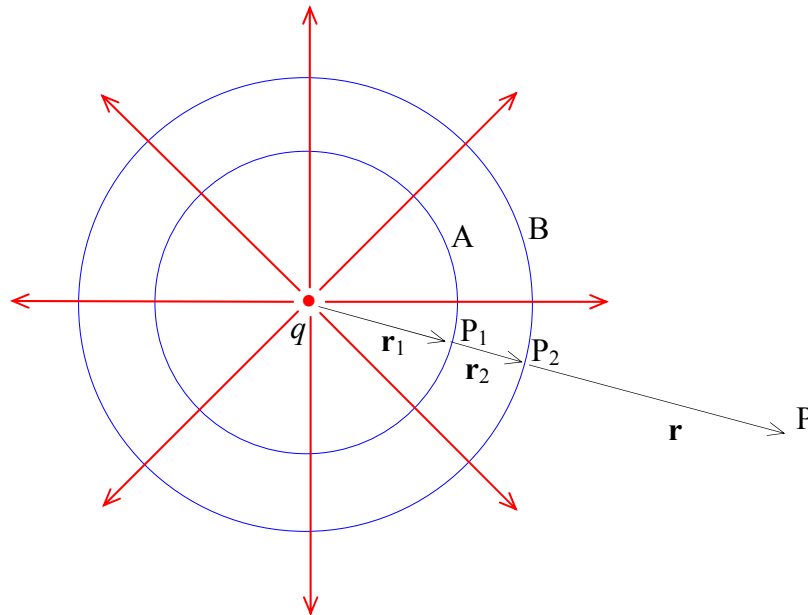
**2.12.11. Problema 2. 11 – Potencial e diferença de potencial**

Uma carga pontual origina no espaço um campo eléctrico,  $\mathbf{E}$  e um potencial  $U$ .

- Calcule o potencial originado pela carga, num ponto P à distância  $r$  da carga. Faça uma aplicação numérica para  $q = 0,067 \mu\text{C}$  e  $r = 30 \text{ cm}$ .
- Calcule a diferença de potencial entre duas superfícies esféricas fictícias, de raios  $r_1$  e  $r_2$ , centradas na carga. Faça uma aplicação numérica para  $r_1 = 14 \text{ cm}$  e  $r_2 = 16 \text{ cm}$  e o mesmo valor de  $q$ .
- Faça uma representação gráfica de  $U(r)$ . Interprete os valores obtidos para  $r = 0$  e para  $r = \infty$ . Como seria o gráfico se a carga fosse negativa?

RESOLUÇÃO:

- a) Uma carga eléctrica colocada num ponto P do espaço, sem mais nada em presença, origina um campo eléctrico radial, dado pela lei de Coulomb,  $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_1$ , em que  $\mathbf{r}_1$  é o vector unitário dirigido da carga para o ponto P. Graficamente será:



O potencial originado por  $q$  é obtido a partir da definição:  $U_p = U(r) = -\int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ .

Notando que  $\mathbf{E}$  e  $d\mathbf{s}$  são paralelos, que  $ds = dr$ , substituindo  $E$  pelo seu valor vem

$$U(r) = -\int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \rightarrow U(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Aplicação numérica:  $U = \frac{0,067 \times 10^{-6}}{4\pi \times 8,8542 \times 10^{-12}} \times \frac{1}{0,30}$  volt = 2 007 V

- b) A diferença de potencial obtém-se de modo análogo ao anterior, mas integrando

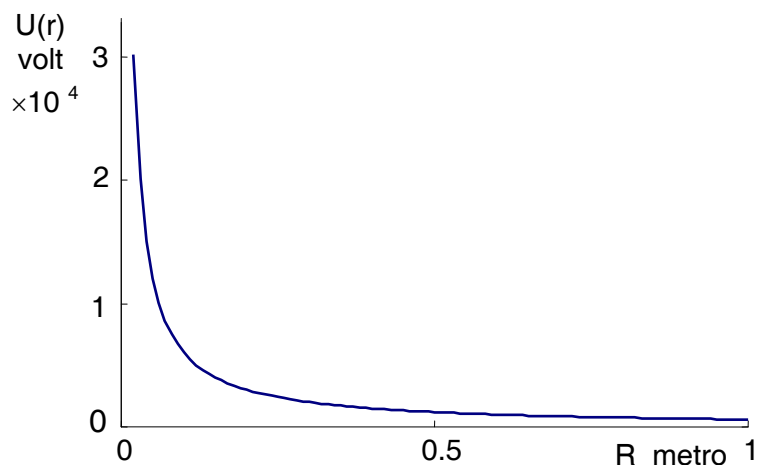
entre  $r_1$  e  $r_2$ :  $U_{AB} = U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} =$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Aplicação numérica:  $U_{AB} = \frac{0,067 \times 10^{-6}}{4\pi \times 8,8542 \times 10^{-12}} \times \left( \frac{1}{0,16} - \frac{1}{0,14} \right)$  volt = - 538 V

- c) Representação gráfica (pág. seguinte)

Repare-se nos valores muito elevados de  $U$ . Isto deve-se ao facto, de que a capacidade da esfera é relativamente baixa, quando comparada com condensadores correntes.



O potencial é nulo para  $r = \infty$ . Resulta da própria definição e do campo eléctrico variar com o inverso do quadrado da distância.

O potencial é infinito para  $r = 0$ . Na prática tal não acontece porque a lei de Coulomb não se pode aplicar a distâncias inferiores às dimensões dos átomos.

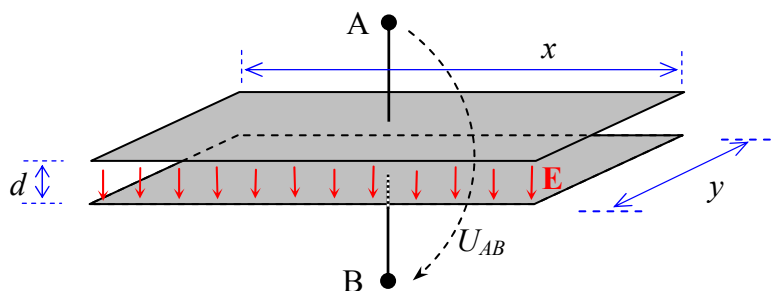
### 2.12.12. Problema 2. 12 – Campo eléctrico e capacidade entre 2 placas

Duas placas rectangulares com a área de  $20 \times 10$  cm são fixadas frente a frente, no vácuo, por meio de um suporte isolante, à distância de 2,0 cm. Às placas é aplicada uma d.d.p. contínua de 1,5 kV. Nestas condições determine:

- O valor do campo eléctrico, suposto uniforme, que se estabelece entre as placas.
- A variação de energia potencial que sofre uma carga eléctrica de  $1,0 \mu\text{C}$  quando ao ser acelerada por este campo eléctrico se desloca de 1,0 cm.
- Calcule a capacidade do condensador constituído por estas placas, e a quantidade de electricidade existente na placa que se encontra carregada positivamente.
- Calcule a energia armazenada no condensador.

**RESOLUÇÃO:**

- Representação gráfica:



$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Ed \quad (\mathbf{E} \text{ é constante entre as placas}) \rightarrow E = \frac{V_{AB}}{d} = \frac{1500}{0,02} \text{ V/m} = 75 \text{ kV/m.}$$

$$\text{b) } \Delta E_p = q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = qEd_1 = 1 \times 10^{-6} \times 75000 \times 0,01 = 0,75 \text{ mJ}$$

$$\text{c) } C = \epsilon \frac{A}{d} = 8,854 \times 10^{-12} \times \frac{0,20 \times 0,10}{0,02} \text{ F} = 8,854 \text{ pF}$$

$$Q = CU = 8,854 \times 10^{-12} \times 1500 \text{ C} = 13,3 \text{ nC}$$

$$\text{d) } E = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \times 13,3 \times 10^{-9} \times 1500 \text{ J} = 19,95 \text{ } \mu\text{J}$$

### 2.12.13. Problema 2. 13 – Capacidade de condensadores

Calcule a capacidade de cada um dos condensadores, em função das características geométricas e da permeabilidade eléctrica do seu dieléctrico,  $\epsilon$ .

- Condensador plano, com área das armaduras  $A = a \times b$  e distância entre elas  $d \ll \min(a, b)$ .
- Condensador esférico, com apenas uma armadura de raio  $R$ .
- Condensador esférico, com duas armaduras concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$ .
- Condensador cilíndrico, com duas armaduras concêntricas de raios  $R_1$  e  $R_2$ , e comprimento  $l$ .

RESOLUÇÃO:

- Condensador plano.

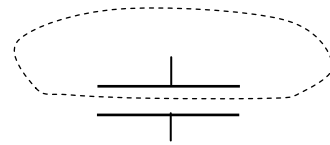
Considere-se uma superfície de Gauss envolvendo uma das armaduras. A área em presença é  $A$  e a distância entre armaduras é  $d$ .

O campo é uniforme entre as armadura, de valor  $E$ .

Pela lei de Gauss será  $EA = Q/\epsilon$ . Pela defini-

ção de potencial é  $E = U/d$ . Logo,  $\frac{Q}{U} = \epsilon \frac{A}{d}$

Mas  $Q/U$  é por definição a capacidade  $C \rightarrow C = \epsilon \frac{A}{d}$



- Esfera de raio  $R$ .

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}; \quad U = -\int_{\infty}^R E dr = -\int_{\infty}^R \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} \quad C = \frac{Q}{U} \rightarrow C = 4\pi\epsilon R$$

- Condensador esférico.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}; \quad U = -\int_{R_2}^{R_1} E dr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \rightarrow$$

$$C = \frac{Q}{U}, \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

d) Condensador cilíndrico.

Campo radial:  $U = -\int_{R_2}^{R_1} E dr$

Considere-se uma superfície de Gauss, cilíndrica, de raio  $r$  e comprimento  $l$ , envolvendo a armadura interior. A área deste cilindro é (não contam as bases)  $A = 2\pi r l$ . Como o campo é radial só há fluxo através desta superfície lateral, pelo que

$$E \times 2\pi r l = Q / \epsilon \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon l r}$$

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E dr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi\epsilon l r} dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} [\log r]_{R_2}^{R_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \log \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{U} \rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon l}{\log \frac{R_2}{R_1}}$$

### 2.12.14. Problema 2. 14 – Aplicação numérica do problema anterior

Faça uma aplicação numérica dos resultados obtidos no problema anterior, para os valores:

- Condensador constituído por duas folhas rectangulares de alumínio com 40 cm × 30 cm, separadas por uma folha de papel encerado ( $\epsilon_r = 3,7$ ) de 0,5 mm de espessura. Qual a diferença de potencial máxima que este condensador pode suportar (rigidez dieléctrica do papel encerado =  $16 \times 10^6$  V/m)?
- 1- Esfera de 1 m de diâmetro, no ar. 2 – Planeta Terra.
- Esfera de raio 24 cm envolvida por esfera de raio 26 cm, com ar entre elas. Calcular a área da esfera e comparar com o resultado obtido para o condensador plano.
- Cabo coaxial.  $R_1 = 1$  mm,  $R_2 = 5$  mm,  $l = 10$ m, dieléctrico teflon ( $\epsilon_r = 2.1$ ).

RESOLUÇÃO:

a) Condensador plano.

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \rightarrow C = 3.7 \times 8.854 \times 10^{-12} \frac{0.40 \times 0.30}{0.0005} \text{ F} = 7.8625 \times 10^{-9} \text{ F} = 7.86 \text{ nF}$$

$$U = E d \rightarrow U_{\max} = E_{\max} \times d \rightarrow U_{\max} = 16 \times 10^6 \times 0.0005 \text{ V} = 8 \text{ kV}$$

b) Esfera de raio  $R$ .

$$C = 4\pi\epsilon R \rightarrow \text{b}_1) C = 4 \times \pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 0.5 \text{ F} = 55.6 \text{ pF}$$

$$\text{b}_2) C = 4 \times \pi \times 8.854 \times 10^{-12} \times 6.37 \times 10^6 \text{ F} = 709 \text{ } \mu\text{F}$$

c) Condensador esférico.

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} \rightarrow C = \frac{4 \times \pi \times 8.854 \times 10^{-12}}{\left(\frac{1}{0.24} - \frac{1}{0.26}\right)} \text{ F} = 347.15 \text{ pF}$$

Esfera intermédia:  $R = 25 \text{ cm}$ . Área desta esfera  $S = 4\pi R^2 = 0.7854 \text{ m}^2$ .

Tratando como condensador plano:  $C = \epsilon \frac{A}{d} \rightarrow$

$$C = 8.854 \times 10^{-12} \frac{0.7854}{(0.26 - 0.24)} \text{ F} = 347.7 \text{ pF (compare-se com o anterior)}$$

d) Condensador cilíndrico.

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\log \frac{R_2}{R_1}} \rightarrow C = \frac{2 \times \pi \times 2.1 \times 8.854 \times 10^{-12} \times 10}{\log \frac{5}{1}} = 725.9 \text{ pF}$$

### 2.12.15. Problema 2. 15 – Efeito do dieléctrico num condensador

Um condensador plano com a área de  $100 \text{ cm}^2$  e distância entre armaduras de  $0,5 \text{ mm}$  tem o dieléctrico de cerâmica ( $\epsilon_r=6,0$ ). O condensador encontra-se carregado e apresenta aos seus terminais uma d.d.p. de  $100 \text{ V}$ . Que acontece se o dieléctrico for retirado, com o condensador carregado e isolado do exterior?

RESOLUÇÃO:

A capacidade de um condensador plano é dada por  $C = \epsilon \frac{A}{d}$

A relação entre a sua carga e a diferença de potencial aos terminais exprime-se por  $Q = CU$ . Antes e depois de retirar o dieléctrico a capacidade do condensador vai variar, mas a sua carga mantém-se uma vez que é dito encontrar-se isolado do exterior. Logo, é a diferença de potencial que varia. Quantificando:

Situação inicial:

$$C_1 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = 6 \times 8,8542 \times 10^{-12} \times \frac{100 \times 10^{-4}}{0,5 \times 10^{-3}} \text{ F} = 1,0625 \text{ nF}$$

Carga eléctrica no condensador:  $Q = C_1 U_1 = 1,0625 \times 10^{-9} \times 100 \text{ C} = 0,10625 \text{ } \mu\text{C}$

Situação final:

$$C_2 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = 1 \times 8,8542 \times 10^{-12} \times \frac{100 \times 10^{-4}}{0,5 \times 10^{-3}} \text{ F} = 0,1771 \text{ nF}$$

Diferença de potencial no condensador

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{0,10625 \times 10^{-6}}{0,1771 \times 10^{-9}} \text{ V} \rightarrow U_2 = 600 \text{ V}$$

**2.12.16. Problema 2. 16 – Condensador com 2 dieléctricos**

Um condensador plano tem as armaduras circulares, com 10 cm de diâmetro. O seu dieléctrico é constituído por uma justaposição de duas rodela, com o diâmetro dos eléctrodos, com 0,5 cm de espessura cada uma, uma de borracha de Neopreno ( $\epsilon_r = 6,7$ ) e a outra de teflon ( $\epsilon_r = 2,1$ ). Ao condensador aplica-se uma diferença de potencial de 10 kV.

- A capacidade deste condensador.
- Calcule o campo eléctrico no interior de cada um dos dieléctricos.
- Compare o resultado anterior com o que seria obtido se, para a mesma distância entre armaduras, apenas tivesse um ou outro dieléctrico.

**RESOLUÇÃO:**

a) Capacidade

Área em presença  $A$ .  $A = \pi r^2 \rightarrow$   
 $A = 0,0314 \text{ m}^2$ .

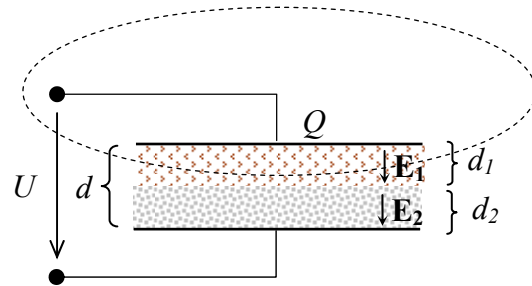
Por definição de potencial  
 $E_1 d_1 + E_2 d_2 = U$

Envolvendo uma das armaduras por uma superfície de Gauss vem  $E_1 A = Q / \epsilon_1$ .

Envolvendo a outra armadura:  $E_2 A = Q / \epsilon_2$  Substituindo  $E_1$  e  $E_2$  na 1ª expressão

resulta  $\frac{Q d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{Q d_2}{\epsilon_2 A} = U$  Como  $C = \frac{Q}{U}$  resulta  $C = \frac{A}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} \rightarrow$

$$C = \frac{0,0314}{\frac{0,005}{6,7 \times 8,854 \times 10^{-12}} + \frac{0,005}{2,1 \times 8,854 \times 10^{-12}}} \text{ F} \quad C = 88,949 \text{ pF}$$



b) Campos eléctricos

$$E_1 = \frac{Q}{\epsilon_1 A} = \frac{CU}{\epsilon_1 A} = \frac{U}{\epsilon_1 \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} \rightarrow E_1 = \frac{88,949 \times 10^{-12} \times 10 \times 10^3}{6,7 \times 8,8542 \times 10^{-12} \times 0,0314} \text{ V/m} =$$

$$= 477,5 \text{ kV/m}$$

$$E_2 = \frac{Q}{\epsilon_2 A} = \frac{CU}{\epsilon_2 A} = \frac{U}{\epsilon_2 \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} \rightarrow E_2 = \frac{88,949 \times 10^{-12} \times 10 \times 10^3}{2,1 \times 8,8542 \times 10^{-12} \times 0,0314} \text{ V/m} = 1,5235 \text{ MV/m}$$

b) Campo eléctrico só com um dieléctrico

$$E = \frac{U}{d} = \frac{10000}{0,01} \text{ V/m} = 1,00 \text{ MV/m}$$

(notar que é independente do dieléctrico. A introdução de um dos dieléctricos com constante dieléctrica elevada pode conduzir a campos elevados na região onde está o outro dieléctrico, podendo eventualmente levar aí à disrupção).

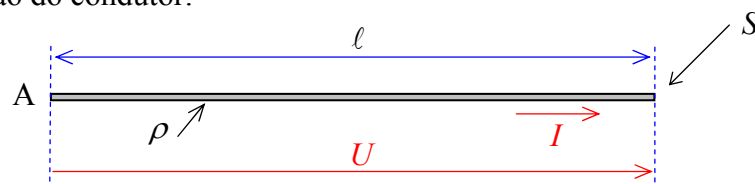
**2.12.17. Problema 2. 17 – Resistência de um condutor**

Um condutor é constituído por um fio de secção recta  $S$ , comprimento  $\ell$  e condutividade de  $\sigma$ . Aos seus terminais aplica-se uma d.d.p  $U$ , o que fará o condutor ser percorrido por uma corrente  $I$ . A partir da lei de ohm  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , determine:

- A expressão da resistência eléctrica deste condutor.
- A relação entre a corrente e a tensão aplicada. Já conhecia esta relação?
- Faça uma aplicação numérica para um condutor de cobre ( $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ ) com  $S = 1,5 \text{ mm}^2$  e  $\ell = 1 \text{ km}$ , ao qual é aplicada uma d.d.p. de 24 V. Determine  $R$  e  $I$  e  $J$ .

**RESOLUÇÃO:**

- Representação do condutor:



Campo eléctrico entre os pontos A e B:  $E = \frac{U}{\ell}$  (resulta da definição da tensão)

Lei de ohm:  $J = \sigma E \rightarrow J = \sigma \frac{U}{\ell}$

$J = \frac{I}{S}$  (por definição de  $J$ )  $\rightarrow \frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{\ell} \rightarrow \frac{U}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$

Mas  $\rho = \frac{1}{\sigma}$  (por definição de  $\rho$ )  $\rightarrow \frac{U}{I} = \rho \frac{\ell}{S}$

À quantidade  $\rho \frac{\ell}{S}$  dá-se o nome de resistência eléctrica do condutor. Depende das características do material ( $\rho$ ) e da sua geometria ( $\ell$  e  $S$ ). Representa-se por  $R$ :

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

Exprime-se em ohm, símbolo  $\Omega$

- Relação entre a tensão e a corrente:  $\frac{U}{I} = R$ . É a conhecida lei de Ohm.

c)  $R = \rho \frac{\ell}{S} = 1,7 \times 10^{-7} \times \frac{1000}{1,5 \times 10^{-6}} \Omega = 11,33 \Omega$

$I = \frac{U}{R} = \frac{24}{11,33} \text{ A} = 2,12 \text{ A}$

$J = \frac{I}{S} = \frac{2,12}{1,5 \times 10^{-6}} \text{ A/m}^2 = 1,41 \text{ MA/m}^2 = 1,41 \text{ A/mm}^2$

**2.12.18. Problema 2. 18 – Tensões e correntes alternadas**

Uma tensão alternada, sinusoidal, é descrita pela seguinte expressão:

$$u(t) = 230\sqrt{2} \operatorname{sen}(314t - \pi/6)$$

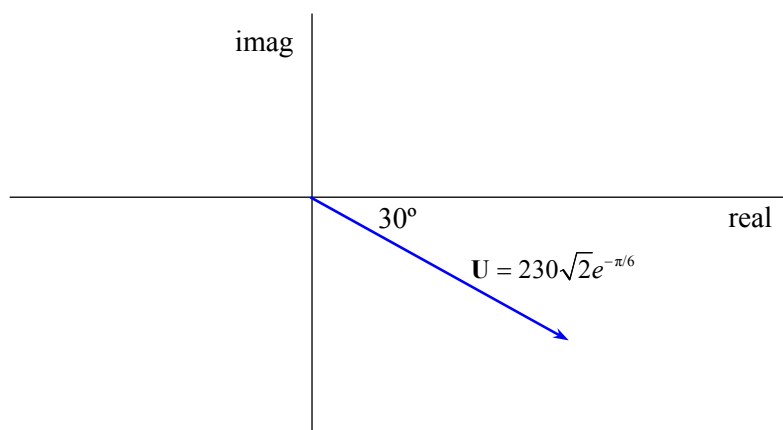
- a) Qual a sua amplitude, frequência angular, frequência, período e defasagem inicial?  
 b) Faça uma representação vectorial (fasor) desta tensão e descreva-a analiticamente na forma de exponencial complexa.

**RESOLUÇÃO:**

a) Da expressão analítica e das definições obtém-se:

- Amplitude:  $U_m = 230\sqrt{2} = 325$  volt
- Frequência angular:  $\omega = 314$  rad/s
- Frequência:  $\omega = 2\pi f \rightarrow f = 314/(2\pi) = 50$  Hz
- Período:  $f = \frac{1}{T} \rightarrow T = 1/50$  s = 20 ms
- Defasagem inicial:  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$  rad =  $-30^\circ$ .

b) Fasor:



Representação por exponencial complexa:

$$u(t) = 230\sqrt{2} e^{(314t - \pi/6)} = 230\sqrt{2} e^{-\pi/6} e^{314t} = \mathbf{U} e^{314t}$$

com  $\mathbf{U} = 230\sqrt{2}e^{-\pi/6}$ .

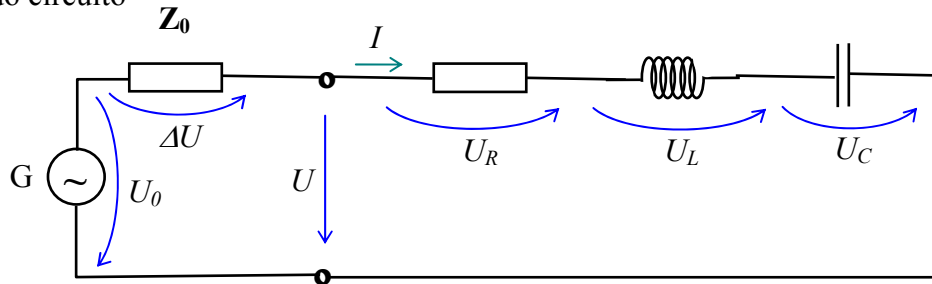
**2.12.19. Problema 2. 19 - Circuito RLC série**

Considere um gerador sinusoidal, com impedância de saída  $Z_0 = 2\Omega$ . A amplitude da sinusóide, com o gerador em vazio, é de 100 V, e a sua frequência de 50 Hz. O gerador encontra-se ligado a um circuito RLC série, com  $R = 50\Omega$ ,  $L = 0.20\text{H}$  e  $C = 150\mu\text{F}$ .

- Faça o diagrama de impedâncias do circuito.
- Determine a corrente na linha (amplitude e defasagem).
- Determine as tensões aos terminais de R, L e C e à saída do gerador.
- Para a bobina dada, qual o valor que deverá ser posto em paralelo com C para que a corrente na linha esteja em fase com a tensão  $U_0$ ?
- Calcule as potências aparente, activa e reactiva transferidas do gerador para o circuito RLC.

RESOLUÇÃO:

Esquema do circuito



- Cálculo das impedâncias e traçado do diagrama

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$$

$$Z_L = j\omega L = j \times 314 \times 0,20 \Omega = 62,83j \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{314,16 \times 150 \times 10^{-6}} \Omega = -21,22j \Omega$$

Fasor:

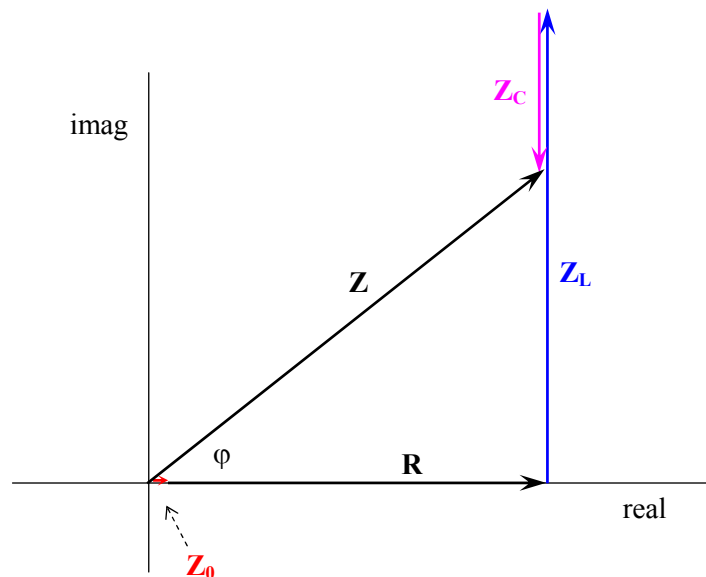
$$\begin{aligned} \vec{Z} &= \vec{Z}_0 + \vec{R} + \vec{Z}_L + \vec{Z}_C = \\ &= 2 + 50 + 62,83j - 21,22j = 52 + 41,61j \end{aligned}$$

Passando à forma trigonométrica,  $\vec{Z} = Z e^{j\varphi}$

$$\text{com } Z = \sqrt{52^2 + 41,61^2} \Omega =$$

$$66,60 \Omega \quad \varphi = \arctan \frac{41,61}{52} =$$

$$= 0,675 \text{ rad} = 38,67^\circ$$



b) Corrente na linha

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}_0}{\vec{Z}} = \frac{100}{66,60e^{j38,67}} \text{ A} = 1,502e^{-j38,67} \text{ A} \rightarrow I = 1,502 \text{ A}, \varphi = -38,67^\circ$$

c) Tensões na resistência, bobina, condensador e saída

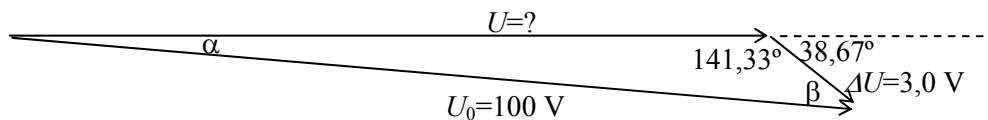
$$\text{Resistência: } \vec{U}_R = R\vec{I} = 50 \times 1,502e^{-j38,67} \text{ volt} = 75,07e^{-j38,67} \text{ V}$$

$$\text{Bobina: } \vec{U}_L = \vec{X}_L\vec{I} = 62,83j \times 1,502e^{-j38,67} \text{ volt} = 62,83e^{j90^\circ} \times 1,502e^{-j38,67^\circ} \text{ V} = 94,34e^{j51,33} \text{ V}$$

$$\text{Condensador: } \vec{U}_C = \vec{X}_C\vec{I} = -21,22j \times 1,502e^{-j38,67} \text{ volt} = 21,22e^{-j90^\circ} \times 1,502e^{-j38,67^\circ} \text{ V} = 94,34e^{-j128,67} \text{ V}$$

(Repare-se que  $U_R + U_L + U_C = 75,05 + 94,34 + 31,68 \text{ V} = 201,07 \text{ V} \gg 100 \text{ V}$ )

Tensão de saída:



$$\Delta U = 2 \times 1,502e^{-j38,67^\circ} \text{ V} = 3,00e^{-j38,67^\circ} \text{ V}$$

$$\alpha + \beta = 38,67^\circ$$

$$\frac{U}{\text{sen } \beta} = \frac{U_0}{\text{sen } 141,33} = \frac{\Delta U}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{Das 2 últimas equações vem } \frac{100}{\text{sen } 141,33} = \frac{3,00}{\text{sen } \alpha} \rightarrow \alpha = 1,07^\circ.$$

A seguir vem  $\beta = 37,60^\circ$ , e pela 1ª equação da linha acima  $\frac{U}{\text{sen } 37,60} = \frac{100}{\text{sen } 141,33}$ ,  
 donde  $U = 97,65 \text{ V}$ .

d) Corrente em fase com a tensão

$$\text{Deverá ser } |Z_C| = |Z_L|, \text{ ou seja } \frac{1}{314,16 \times C} = 62,83 \rightarrow C = 50,66 \mu\text{F}$$

e) Potências

$$\text{Potência aparente: } P_a \equiv S = U_{ef} I_{ef} = \frac{97,64}{\sqrt{2}} \times \frac{1,502}{\sqrt{2}} \text{ VA} = 73,33 \text{ VA}$$

$$\text{Potência reactiva: } P_r \equiv Q = U_{ef} I_{ef} \text{sen } \varphi = 73,33 \times \text{sen}(38,67^\circ) \text{ Var} = 45,82 \text{ VAR}$$

$$\text{Potência activa: } P = U_{ef} I_{ef} \text{cos } \varphi = 73,33 \times \text{cos}(38,67^\circ) \text{ W} = 57,25 \text{ W}$$

## 2.13. Problemas propostos

### 2.13.1. Problema 2. 20 – Dipolo

Considere o dipolo do Problema 2.4. Defina o eixo dos  $xx$  coincidente com o segmento de recta que une as cargas e com origem a meia distância entre elas e o eixo dos  $yy$  perpendicular a este.

- Calcule o potencial ao longo do eixo dos  $xx$ .
- Calcule o potencial ao longo do eixo dos  $yy$ .

### 2.13.2. Problema 2. 21 – Cargas

Num tubo de raios catódicos é medida uma corrente de cátodo de  $32 \mu\text{A}$ . Quantos electrões incidem no alvo durante um varrimento completo do feixe ( $1/25 \text{ s}$ )?

### 2.13.3. Problema 2. 22 – Descarga de condensador

Um condensador, com a capacidade de  $10,0 \mu\text{F}$ , encontra-se carregado, apresentando aos seus terminais uma d.d.p. de  $48 \text{ V}$ . Descarrega-se este condensador através de uma resistência eléctrica de  $10,0 \text{ k}\Omega$  com  $1 \text{ mm}^2$  de secção. A descarga faz-se segundo a lei exponencial  $q = q_0 e^{-t/\tau}$  em que  $q_0$  é a carga inicial do condensador e  $\tau = RC$  a constante de tempo do circuito constituído pelo condensador e resistência. Nestas condições determine:

- A lei de variação da corrente ao longo do tempo, bem como o seu valor para  $t = 0$  e  $t = 0,1 \text{ s}$ .
- A densidade de corrente na resistência, no instante  $t = 0$ .
- A energia dissipada na resistência por efeito de Joule.

### 2.13.4. Problema 2. 23 – Resistência

Que secção deverá ter um fio de platina ( $\rho = 11,0 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ ) com  $10 \text{ cm}$  de comprimento, para ter uma resistência de  $100 \Omega$ ?

### 2.13.5. Problema 2. 24 – Associação de resistências

Demonstre a fórmula de associação de resistências:

- em série.
- em paralelo.

### 2.13.6. Problema 2. 25 – Associação de bobinas

Demonstre a fórmula de associação de bobinas:

- em série.
- em paralelo.

### 2.13.7. Problema 2. 26 – Associação de condensadores

Demonstre a fórmula de associação de condensadores:

- em série.
- em paralelo.

### 2.13.8. Problema 2. 27 – Força electromagnética sobre carga, 1

Um feixe de electrões é lançado com velocidade  $v_0$  segundo o eixo dos  $xx$ , numa região do espaço onde existem um campo eléctrico  $\mathbf{E}$  dirigido segundo o eixo dos  $yy$  e um campo magnético  $\mathbf{B}$  dirigido segundo o eixo  $zz$ .

Dados numéricos:  $v_0 = 7500$  m/s,  $E_y = 1,2$  kV/m e  $B_z = 0,05$  T.

- Qual a força electromagnética que actua sobre o feixe.
- Obtenha a sua lei de movimento (aceleração, velocidade e trajectória) no caso em que  $B = 0$ . Esboce a sua trajectória, indicando o valor da velocidade nos pontos notáveis.
- Qual deverá ser a velocidade dos electrões para o seu movimento for rectilíneo e uniforme?

### 2.13.9. Problema 2. 28 – Força electromagnética sobre carga, 2

Um feixe de partículas carregadas positivamente e com velocidade uniforme, é lançado segundo o eixo dos  $xx$ , numa região do espaço em que existe um campo eléctrico uniforme segundo o eixo dos  $yy$  e um campo magnético, também uniforme, segundo o eixo dos  $zz$ .

- Determine a força total a que se encontram sujeitas as partículas do feixe.
- Supondo que se trata de protões e que o campo magnético tem o valor de 0,1 T, ajusta-se o campo eléctrico de modo a que os protões descrevam uma trajectória rectilínea, obtendo-se  $E = 1,23$  kV/m. Qual a velocidade das partículas do feixe?

### 2.13.10. Problema 2. 29 – Força sobre uma espira

Uma espira de cobre de secção quadrada  $\ell \times \ell$ , atravessada por uma corrente eléctrica  $I$ , é colocada paralelamente a um campo magnético  $B$ .

- Determine o binário a que fica sujeita.
- Particularize para  $\ell = 6$  cm,  $I = 10$  A e  $B = 0,8$  T.
- Qual a posição em que ficaria a espira se pudesse rodar livremente em torno do eixo?

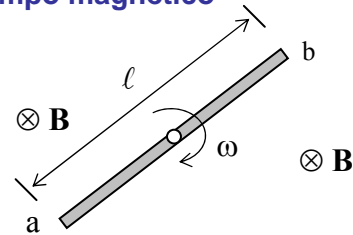
### 2.13.11. Problema 2. 30 – Campo magnético produzido por uma corrente

Tomando como ponto de partida a lei de Biot-Savart:

- Determine o campo magnético produzido no exterior de um condutor rectilíneo de comprimento infinito, percorrido por uma corrente eléctrica de intensidade  $I$ .
- Faça uma aplicação numérica calculando o valor do campo a 50 cm de um condutor rectilíneo percorrido por uma corrente de 6 A.

**2.13.12. Problema 2. 31 – Barra em movimento num campo magnético**

Imagine uma barra metálica de comprimento  $\ell$ , rodando em torno do seu ponto médio, num campo magnético de intensidade  $B$ , como se mostra na figura.



- Calcule a diferença de potencial que se estabelece entre os seus extremos,  $a$  e  $b$ .
- Faça uma aplicação numérica:  $\ell=26$  cm,  $B=0,4$  T e  $\omega=3000$  rpm.

**2.13.13. Problema 2. 32 – Força de uma corrente sobre condutores**

Considere dois condutores rectilíneos paralelos, de comprimento infinito, à distância  $d$ , percorridos por correntes  $I_1$  e  $I_2$ .

- Calcule a força que se exerce sobre os condutores.
- Reveja a definição da unidade de base eléctrica do SI, “ampere”, e confira os resultados respectivos.

**2.13.14. Problema 2. 33 – Aplicação da lei de Ampere**

Utilizando a lei de Ampere do campo magnético:

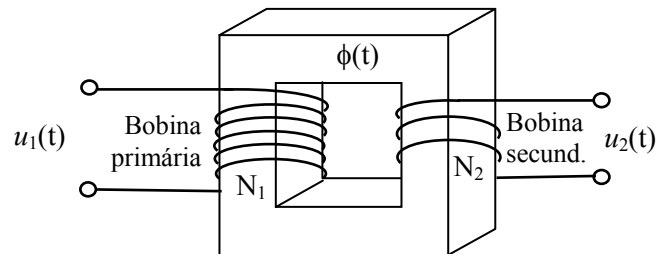
- Faça uma verificação do resultado obtido no Probl. 2.13.
- Estenda o cálculo à determinação do campo magnético no interior do condutor.
- Faça uma representação gráfica de  $B(r)$ .

**2.13.15. Problema 2. 34 – Aplicação da lei de Gauss do campo magnético**

Utilizando a lei de Gauss do magnetismo calcule o fluxo do campo magnético através da superfície de uma esfera que contenha no seu interior um magneto rectangular.

**2.13.16. Problema 2. 35 - Transformador**

Um transformador eléctrico é constituído por um núcleo ferromagnético envolvido por duas bobinas de fio condutor, a bobina primária com  $N_1$  espiras e a bobina secundária com  $N_2$  espiras, como se esquematiza na figura.

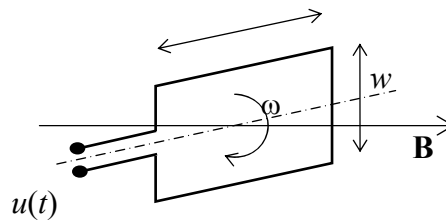


Uma tensão  $u_1(t)$ , variável no tempo, aplicada à bobina primária, origina um fluxo magnético no núcleo, também variável no tempo. Por sua vez, um fluxo variável através da bobina secundária origina uma tensão secundária  $u_2(t)$ . Desprezando a resistência dos enrolamentos, as perdas no núcleo e supondo que todo o fluxo magnético circula através dele:

- Determine  $u_2(t)$  em função de  $u_1(t)$  de  $N_1$  e de  $N_2$ , supondo que não há carga na bobina secundária.
- Determine a relação entre a tensão de entrada e a respectiva corrente.
- Faça uma aplicação para o caso em que  $u_1(t)$  é alternado sinusoidal e calcule a relação entre as amplitudes e as fases da tensão de saída e de entrada.
- Faça uma aplicação numérica para um transformador com  $N_1=2000$  espiras,  $N_2=46$  espiras e  $U_1=10$  kV. Determine também o fluxo no núcleo e qual deverá ser a secção do mesmo de modo a que o valor de  $B$  não exceda 0.8 T (para que não haja saturação).

**2.13.17. Problema 2. 36 – F.e.m. numa bobina em movimento em B**

Uma bobina, constituída por  $N$  espiras, com a forma rectangular de área  $\ell \times w$ , é obrigada a executar um movimento de rotação uniforme, à velocidade  $\omega$ , como se mostra na figura.



- Determine a f.e.m. que se estabelece aos seus terminais.
- Faça uma aplicação numérica para  $\ell = 20$  cm,  $w = 10$  cm,  $N = 86$  espiras,  $B = 0,6$  T e  $\omega = 314$  rad/s ( $f = 50$  Hz).

**2.13.18. Problema 2. 37 – Linha bifilar, 1**

Uma linha eléctrica bifilar usada na transmissão de sinais é constituída por dois condutores paralelos e iguais, cada um com  $1,0 \text{ mm}^2$  de secção. A distância entre condutores é de 9,0 mm. Considere a linha de cobre nu ( $\rho = 1,70 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ ), no ar. O coeficiente de auto-indução da linha é de 1,05 mH/m. Considere a linha sem perdas.

- Determine a sua impedância característica e a velocidade de transmissão dos sinais.
- Considere a linha alimentada por um gerador de impulsos com impedância de saída igual à impedância característica da linha ( $Z_0 = Z$ ). A linha encontra-se terminada com uma resistência de carga  $R_L$ . Faça um esboço dos sinais que observa à entrada da linha nos seguintes 3 casos:
  - $R_L < Z$ ,
  - $R_L = Z$ ,
  - $R_L > Z$ .

Em que caso é que se diz que a linha se encontra adaptada?

Fórmula: Capacidade de uma linha bifilar:  $\frac{1}{C} = \frac{1}{\pi\epsilon\ell} \ln\left(\frac{2D}{d}\right)$ ;  $D$  - distância entre condutores,  $d$  - diâmetro dos condutores (supostos iguais),  $\ell$  - comprimento da linha;  $\epsilon$  - permeabilidade eléctrica

**2.13.19. Problema 2. 38 – Linha bifilar, 2**

Considere uma linha bifilar, sem perdas, com a impedância característica de  $600 \Omega$  e o comprimento de  $300 \text{ m}$ . A linha está terminada com uma resistência de  $300 \Omega$ . No instante  $t=0$  liga-se o início da linha a uma bateria de  $12 \text{ V}$ . Faça uma representação gráfica do estabelecimento das tensões e correntes na linha.

**2.13.20. Problema 2. 39 – Ondas electromagnéticas, 1**

Considere a onda electromagnética descrita por

$$E_x = 0 \quad E_y = E_0 \cos[\omega(t - x/c)] \quad E_z = 0$$

Com o auxílio das equações de Maxwell:

- Determine a expressão do campo magnético associado.
- Que relação deverá existir entre as amplitudes do campo eléctrico e magnético.

**2.13.21. Problema 2. 40 – Ondas electromagnéticas, 2**

Considere uma onda electromagnética plana que se propaga na direcção do eixo dos  $xx$ . Suponha que se trata de uma onda sinusoidal, com o campo eléctrico polarizado linearmente segundo o eixo dos  $yy$ . A frequência de oscilação é  $f = 30 \text{ MHz}$  e a amplitude do campo eléctrico é de  $750 \text{ V/m}$ . Nestas condições:

- Determine a polarização do campo magnético, a sua amplitude e a sua desfasagem no tempo em relação ao campo eléctrico.
- Determine o comprimento de onda e faça um esboço que mostre os eixos de referência ( $x, y, z$ ), a direcção de propagação e a evolução espacial dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  num determinado momento.
- Calcule o vector de Poynting associado a esta onda e calcule o seu fluxo através de uma superfície de  $10 \text{ cm}^2$  perpendicular à direcção de propagação da onda.
- Calcule a densidade de energia eléctrica e magnética associada a esta onda.
- Calcule a pressão de radiação exercida pela onda sobre a superfície referida na alínea c), supondo que a superfície absorve toda a energia que sobre ela incide.
- Obtenha as equações de propagação dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ .

## 3. FÍSICA RELATIVISTA

### 3.1. Introdução

A observação dos fenómenos correntes, lida com objectos que se movem com velocidades muito inferiores à velocidade da luz no vácuo,  $c$ . Mesmo que nestas observações se incluam os movimentos dos planetas no sistema solar (a velocidade linear da Terra é aproximadamente igual a  $3 \times 10^4$  m/s no referencial solar), está-se bastante abaixo da velocidade da luz. Para estes casos podem aplicar-se as equações e conceitos (formalismo) da Mecânica Newtoniana (ou clássica).

Há muitos casos em que os corpos se movem a velocidades que se aproximam de  $c$ . Dão-se como exemplos o movimento das galáxias e o movimento de muitas partículas atómicas e sub-atómicas. Neste último caso encontra-se o conhecido movimento dos electrões acelerados por diferenças de potencial elevadas: é possível acelerar electrões através de uma d.d.p. elevada (da ordem de alguns milhões de volts) de modo a que estes adquiram velocidades de  $0,95c$ . De acordo com a teoria clássica, se for quadruplicada esta tensão de aceleração, a energia cinética também quadruplica pelo que a velocidade duplicará, ou seja, passará para  $2 \times 0,95c = 1,90c$ . A experiência mostra que, no entanto, tal não acontece, mostra que a velocidade aumenta apenas para  $0,998c$ , contrariando as previsões da Física Clássica. Mais revela a experiência, que não existe nenhuma partícula que se mova com velocidade igual ou superior à velocidade da luz no vácuo.

A teoria que explica o comportamento dos corpos a qualquer velocidade, desde  $v = 0$  até  $v = c$ , foi desenvolvida por Einstein<sup>(20)</sup>, que a apresentou em 1905 com o nome de Teoria da Relatividade Restrita.

Conta-se que Einstein ia de eléctrico em Zurique, sentado voltado para trás, e enquanto via o relógio da torre da Câmara Municipal a afastar-se teve a ideia de que se o carro em que viajava fosse a uma velocidade superior à da luz, veria os ponteiros do relógio andar para trás (o que seria contrário ao princípio da causalidade), tendo daí concluído que a velocidade da luz seria a velocidade máxima possível de um objecto.

Dessa constatação, passar ao estudo dos movimentos relativos e à criação de uma nova teoria que explicasse as discrepâncias de alguns fenómenos foi o acto desse génio, que além do mais possuía boa preparação em Física Teórica, uma grande inteligência, e tempo para meditar.

Como se verá adiante, as equações da Física Relativista degeneram nas equações da Física Newtoniana sempre que  $v \ll c$ .

---

<sup>20</sup> Albert Einstein, físico americano de origem alemã, 1879-1955.

A Teoria da Relatividade Restrita, trata de fenómenos tais como a dilatação do tempo, a contracção do espaço, a composição velocidades, e fornece novas expressões para o momento linear e para a energia. Nela também se estabelece a equivalência entre massa e energia, ( $E = mc^2$ ) tão importante para o funcionamento das centrais nucleares, mas que infelizmente foi confirmada experimentalmente à custa do sacrifício de centenas de milhares de vidas humanas com as explosões das bombas atómicas da segunda Guerra Mundial.

A Teoria da Relatividade Restrita apenas lida com a fenomenologia que acima se indica desde que os referenciais sejam de inércia e não haja campos gravíticos em presença; mais tarde, em 1915, Einstein apresentou a Teoria da Relatividade Generalizada, válida para quaisquer referenciais mesmo na presença de campos gravíticos, onde são abordados temas como equivalência entre aceleração e campo gravítico, a curvatura do espaço, a deflexão e atracção da luz pela matéria e outros que têm enorme importância em Astronomia e Física Nuclear.

Saliente-se aqui que as equações de Maxwell são relativistas, no sentido em que mantêm a forma em qualquer referencial de inércia.

### 3.2. Transformações de Galileu

Designa-se por *evento* qualquer fenómeno físico ou acontecimento que ocorre num referencial de inércia. Como se sabe da Mecânica Clássica, dá-se o nome de *referencial de inércia* a todo aquele que não se encontra submetido a qualquer aceleração; o movimento relativo de dois referenciais de inércia é rectilíneo e uniforme.

Um evento é identificado pelo *local* em que se deu e pelo *instante* em que ocorreu, ou seja, pelas quatro coordenadas ( $x, y, z, t$ ).

Considerem-se dois referenciais de inércia  $S$  e  $S'$ . Para simplificar a exposição escolhem-se os sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais e  $S'$  escolhido com os eixos ( $x', y', z'$ ) paralelos aos seus eixos homólogos em  $S$ ,  $O'$  deslocando-se segundo  $Ox$ , com  $O$  e  $O'$  coincidentes no instante  $t = 0$ . Seja  $v$  a velocidade de  $O'$  em relação a  $S$ , constante por se tratar de referenciais de inércia.

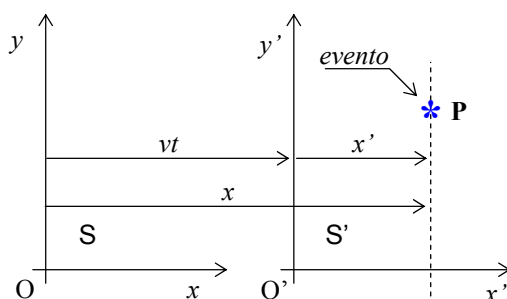


Fig. 3.1 – Dois referenciais de inércia

A relação da Mecânica Clássica entre as coordenadas ( $x', y', z', t'$ ) do evento em  $S'$  e as coordenadas ( $x, y, z, t$ ) do evento em  $S$  é dada por

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (3.1)$$

Estas equações designam-se por *equações de transformação de coordenadas de Galileu*.

Repare-se que se fez  $t' = t$ . Na Física Clássica considera-se o tempo igual em todos referenciais, Esta hipótese, conduz a resultados incorrectos no caso em que  $v$  se aproxima de  $c$ .

Admita se agora que o evento P é o movimento uniforme de um objecto na direcção do eixo dos  $xx$ . Durante o intervalo de tempo elementar  $dt$ , o objecto, no referencial  $S$ , descreve o percurso elementar  $dx$ . No referencial  $S'$ , o deslocamento do mesmo objecto será dado por  $dx' = dx - vt$ . A velocidade do objecto em  $S'$  será  $dx'/dt'$ . Atendendo a que por hipótese  $t' = t$ , e portanto  $dt' = dt$ , vem,  $\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$ , ou, utilizando outra notação,  $u'_x = u_x - v$ . As restantes componentes da velocidade são  $u'_y = u_y$  e  $u'_z = u_z$ , pelo que fica

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \quad (3.2)$$

As equações (3.2) constituem as *equações transformação de velocidade de Galileu*.

### 3.3. A velocidade da luz

Considerem-se as equações de Maxwell, a partir das quais se obtém a equação de propagação das ondas electromagnéticas em espaço livre e a velocidade propagação das mesmas,

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (3.3)$$

Em que referencial é que se verifica esta equação? Ou, posto o problema de outra forma, será que as equações de Maxwell [ver eq. (3.43) a (3.46)] mantêm forma em todos referenciais? A resposta é sim, as equações mantêm a mesma forma em todos os referenciais (de inércia).

Considere-se agora um outro exemplo: um avião (referencial  $S'$ ) em movimento rectilíneo e uniforme (velocidade  $v$ ) em relação à terra (referencial  $S$ ). Num determinado instante o avião envia um impulso luz com a direcção e sentido do seu movimento. No referencial do avião este impulso propaga-se com velocidade  $c$ . Será que no referencial terrestre o mesmo impulso de luz se propaga com velocidade  $c+v$ ? A resposta é não. A experiência prova que no referencial terrestre a velocidade da luz no vácuo é sempre rectilínea e uniforme, de valor  $c$ , como aliás o é em qualquer referencial de inércia, na ausência de campos gravíticos intensos.

No século XIX surgiu, para explicar a propagação das ondas electromagnéticas, a necessidade de estabelecer a existência de um meio que preenchesse uniformemente todo o espaço, através do qual se propagariam as ondas. Esse meio, a que se chamou *éter*, estaria associado a um referencial privilegiado, através do qual as ondas electromagnéticas se propagariam, com velocidade  $c$ . A Terra, no seu movimento através do espaço, deslocar-se ia através do éter com velocidade  $v$ , produzindo-se um "vento de éter", com sentido oposto ao da sua velocidade.

As tentativas de determinação da velocidade do éter e as tentativas associadas de procurar detectar variações na velocidade da luz na Terra, consoante a mudança de velocidade desta (em cada seis meses a velocidade da Terra muda de direcção no referencial solar) foram assuntos que tomaram largas horas a físicos de renome. A famosa experiência de Michelson-Morley realizada por Michelson<sup>(21)</sup> em 1881 e posteriormente por Morley<sup>(22)</sup> e outros, em várias ocasiões, permitiram concluir que velocidade da luz é constante na Terra, independentemente da velocidade desta no referencial solar, levando a pôr de parte a hipótese do éter.

### 3.4. Os postulados de teoria da relatividade restrita

A Teoria da Relatividade Restrita baseia-se em dois postulados, propostos por Einstein:

P1 – **Princípio da relatividade**: as leis da Física devem permanecer inalteradas em todos referenciais de inércia.

P2 – **Princípio da constância da velocidade da luz**: a velocidade da luz no vácuo é rectilínea e uniforme, com um valor constante,  $c$ , qualquer que seja o referencial de inércia, a velocidade do observador, ou a velocidade da fonte de luz.

O 1º princípio é uma extensão do princípio da relatividade de Galileu, que afirma que as leis da Mecânica devem ter o mesmo aspecto (permanecer inalteradas) em todos referenciais de inércia. Neste princípio faz-se a generalização das leis da Mecânica a toda a Física: Electromagnetismo, Termodinâmica, Biologia, etc.

O 2º princípio afirma não ser importante saber-se qual o referencial inércia em que o observador se encontra quando procede à determinação da velocidade da luz, uma vez que esta é constante, independentemente do referencial, da direcção ou da velocidade da fonte.

### 3.5. O tempo de um referencial

Considere-se o caso já referido, de Einstein (observador em  $S'$ ) a deslocar-se de carro eléctrico e a observar o movimento dos ponteiros do relógio da torre da Câmara Municipal. Um outro observador encontra-se sentado no banco do jardim (observador em  $S$ ), também a olhar para o mesmo relógio. Considerem se como eventos a passagem dos ponteiros pelo minuto certo. Será que os dois observadores em  $S'$  e em  $S$  consideram que existe simultaneidade neste evento? Como se poderá definir simultaneidade?

---

<sup>21</sup> Albert Abraham Michelson, físico americano de origem alemã, 1852-1931.

<sup>22</sup> Edward Williams Morley, físico e químico americano, 1838-1923.

O observador em  $S$  nota que o evento se dá a intervalos  $\Delta t$  regulares, mas para o observador em  $S'$ , uma vez que se vai afastando relógio, este evento ocorre mais lentamente, com regularidade  $\Delta t' > \Delta t$ . No caso limite do observador em  $S'$  se afastar com velocidade  $c$ , este vê o relógio parado,  $\Delta t' = \infty$ , isto é, o tempo não avança.

### 3.5.1. Sincronização de relógios

Vai procurar aprofundar-se o conceito de tempo de um referencial. O **tempo de um referencial** está associado à **evolução da indicação dos relógios** que se encontram solidários com esse referencial. Os relógios encontram-se onde for necessário saber o valor do tempo, ou então, se assim se desejar, distribuídos numa grelha de coordenadas (por exemplo sobre marcas de 10 em 10 km sobre o eixo dos  $xx$ , idem sobre os  $yy$  e idem sobre os  $zz$ ). Se um observador colocado na origem, junto ao relógio que aí se encontra, que será designado por **relógio principal**, enviar um impulso luminoso em todas as direcções no instante  $t=t_0$  do relógio principal, os restantes relógios dizem-se **sincronizados** com o relógio principal se marcarem o tempo  $t = t_0 + r/c$ , em que  $r$  é a distância do respectivo relógio à origem. Este procedimento de sincronização admite que a velocidade da luz tem o mesmo valor em todas as direcções, o que, pelo 2º postulado apresentado atrás, se verifica em qualquer referencial de inércia. Para o sincronismo  $t_0$  é um instante inicial qualquer.

A sincronização dos relógios por este procedimento faz-se pois num determinado referencial de inércia. Nesse referencial, **um evento estará associado a um conjunto de 4 coordenadas**, 3 de espaço e uma de tempo, com um certo valor. Em qualquer outro referencial de inércia ao mesmo evento estarão associados outros valores para as coordenadas, mesmo para a coordenada tempo.

### 3.5.2. Simultaneidade de acontecimentos

Na Física Clássica o tempo é igual em todos os referenciais. Tal deixou de acontecer na Física Relativista. Para tal vai mostrar-se que dois eventos poderão ser simultâneos num referencial e não o ser noutra referencial de inércia.

Considere-se a seguinte **experiência imaginada** por Einstein: Uma carruagem de comboio desloca-se com uma velocidade constante,  $v$ . Um raio (descarga atmosférica) atinge a carruagem, deixando duas marcas na carruagem (uma em cada extremo) e duas nos carris nas posições debaixo da carruagem. À carruagem está associado um referencial e ao solo com os carris outro referencial. Os eventos em causa são:

*Evento 1* – marcação do extremo da frente da carruagem e do ponto correspondente nos carris,

*Evento 2* – marcação do extremo de trás da carruagem e do ponto correspondente nos carris.

A questão está em saber como é que os dois observadores se pronunciam sobre a simultaneidade destes eventos (figura seguinte).

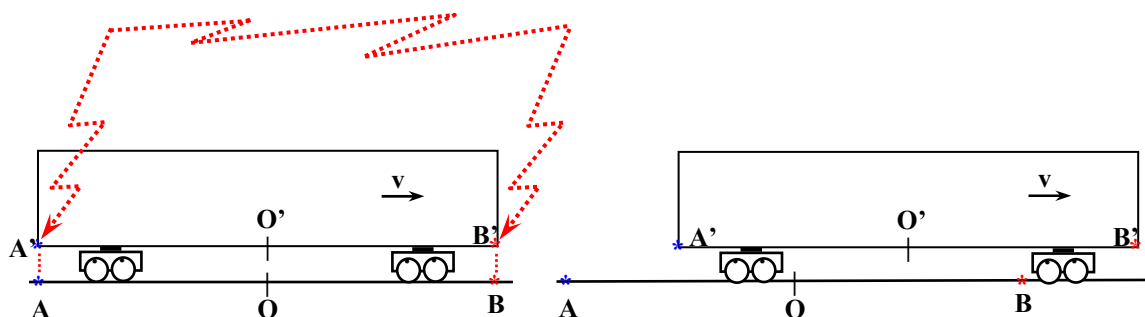


Fig. 3.2 – Simultaneidade de acontecimentos

O observador O em terra, colocado a meia distância de A e B recebe os sinais das descargas eléctricas em A e em B no mesmo instante, concluindo assim que os eventos 1 e 2 são simultâneos. Com o observador O' passa-se algo diferente: este observador recebe em primeiro lugar a informação da descarga eléctrica em B', uma vez que se está a deslocar nessa direcção, e só a seguir é que recebe informação da descarga em A'. O observador O' conclui assim que o evento 1 é anterior ao evento 2. Temos aqui o exemplo de dois eventos que são simultâneos num referencial de inércia e não o são noutro.

Um dispositivo de medida que utiliza um princípio baseado no do movimento do observador em relação a dois eventos é o *giroscópio de fibra óptica*: Um impulso de luz é enviado para uma bobina de fibra óptica, sendo separado em dois, que são obrigados a percorrer a mesma trajetória mas em sentidos opostos; ao serem detectados existe uma diferença de tempos entre eles, devido ao facto da bobina se encontrar em rotação. A detecção dos dois impulsos, simultânea no referencial terrestre, não é simultânea no referencial do giroscópio.

A experiência anterior permite concluir que a simultaneidade de dois eventos num determinado referencial de inércia não implica a simultaneidade desses mesmos eventos noutro referencial de inércia; a *simultaneidade não é um conceito absoluto*, depende do estado de movimento do observador.

### 3.5.3. Dilatação do tempo

Vai a seguir dar-se um exemplo que ilustra o facto do tempo entre dois eventos ser diferente, consoante o referencial em que é medido.

Considere-se um observador O' no interior de um avião que se desloca com um movimento uniforme, de velocidade  $v$ , em relação à base aérea. Este observador dispõe de um gerador de impulsos luminosos e envia estes impulsos na vertical em direcção a um espelho que se encontra no topo interior do avião e os reflecte de volta ao observador. Considerem-se os eventos seguintes:

- Evento 1* – Envio de um impulso de luz
- Evento 2* – Reflexão do impulso no espelho
- Evento 3* – Detecção do impulso reflectido.

Considere um segundo observador, O, no referencial da base aérea, que do exterior pode observar o que se passa, e se encontra numa perpendicular ao plano descrito pelos impulsos de luz. Como é que os dois observadores descrevem estes eventos?

Para o observador no avião a luz é enviada para cima, na vertical, é reflectida para baixo, também na vertical, descrevendo um caminho inverso do anterior. Designando por  $d$  a distância entre o gerador de impulsos de luz e o espelho, o intervalo de tempo que a luz leva a ir e voltar, designado por **tempo próprio** do referencial, é dado por

$$\Delta t_p = \frac{2d}{c} \quad (3.4)$$

Para a medição deste intervalo de tempo, medida efectuada pelo observador O' no referencial S', é apenas necessário o relógio R'.

Para o observador O, no referencial da base aérea, os acontecimentos passam-se de forma diferente: quando a luz emitida (1) atinge o espelho (2) este encontra-se noutra posição, avançado em relação à anterior. O impulso de luz aparenta ter sido enviado com uma certa inclinação. Finalmente, quando o impulso de luz reflectida atinge de volta o gerador de impulsos (3) já este se encontra mais avançado, com o dobro do avanço anterior. O caminho percorrido pelo impulso de luz enviado, o caminho do impulso de luz reflectido e a trajectória do avião formam um triângulo isósceles, como se representa na figura ao lado. O observador da base, com o auxílio de um relógio R, mediu para o tempo de ida e volta o valor  $\Delta t$ .

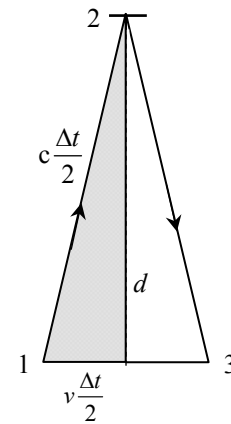


Fig. 3.3 – Composição de velocidades

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado ao rectângulo sombreado, vem, considerando para velocidade da luz o valor  $c$ ,

$$\left(c \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(v \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

Resolvendo em ordem a  $\Delta t$  e entrando com o valor de  $d$  obtido em (3.4) obtém-se a relação

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p \quad (3.5)$$

com

$$\gamma = (1 - v^2 / c^2)^{-1/2} \geq 1 \quad (3.6)$$

A conclusão a que se chegou, baseada no postulado da constância da velocidade da luz em qualquer referencial e em qualquer direcção, diz que o intervalo de tempo decorrido no referencial associado a um evento é **inferior** ao intervalo de tempo medido por um observador noutra referencial. Visto de outro modo, o intervalo de tempo medido por um observador em movimento em relação a um determinado relógio é maior do que o

correspondente intervalo de tempo medido por um observador em repouso em relação a esse relógio.

Na figura junta mostra-se a evolução de  $\gamma$  em função de  $v/c$ . Note-se que para  $v \ll c$  se tem  $\gamma \approx 1$ , o que conduz a  $\Delta t \approx \Delta t_p$ , resultado conforme à Mecânica Clássica. Quando  $v$  se aproxima de  $c$ ,  $\gamma \rightarrow \infty$ . Deverá ser  $v < c$  pois caso contrário  $\gamma$  seria um número imaginário puro e a expressão (3.5) conduziria a um valor imaginário para o tempo.

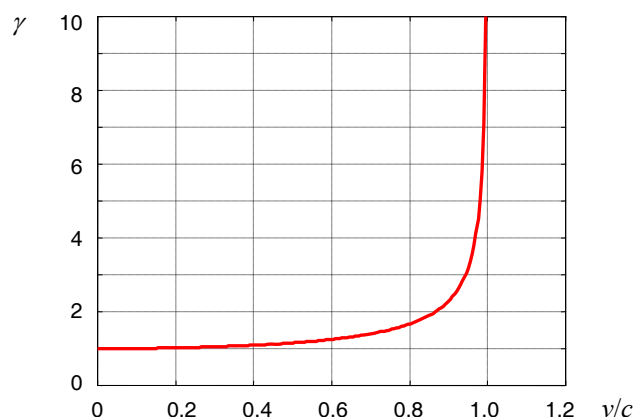


Fig. 3.4 – Evolução do factor  $\gamma$  com a velocidade

### 3.5.4. O paradoxo dos gémeos

Este paradoxo envolve dois irmãos gémeos viajando em referenciais distintos a uma velocidade elevada. Aos 20 anos o irmão Pepe Rápido resolve efectuar uma viagem ao planeta X20, a 20 anos-luz da Terra, deixando cá o irmão Lesma Lenta. O Pepe viajou à velocidade de  $0,95c$ . Ao chegar a X20 já ia com saudades e regressou imediatamente. Quando desembarcou na Terra, Pepe, com 33 anos, ficou chocado ao encontrar o irmão muito mais velho do que ele. Fizeram as contas, utilizando a velocidade e a expressão (3.5) e concluíram aquilo que cada um por si já sabia: O Pepe estava com 33 anos e o Lesma com 62 anos. Mas logo a seguir o Lesma argumentou: não pode ser, os movimentos são relativos e portanto a Terra e toda a Galáxia é que se deslocaram em relação à tua nave com velocidades simétricas das que levaste e portanto tu Pepe é que tens que estar mais velho (o que se verificava não estar a acontecer, o Lesma estava mais velho). Deixa-se ao leitor analisar o problema e dizer que postulado ou que outra condição é que as considerações de Lesma não estão a respeitar.

### 3.5.5. A contracção do espaço

O comprimento de um objecto também depende do referencial em que se encontra. Chama-se **comprimento próprio** àquele que é medido por um observador em repouso no referencial em que o objecto se encontra. O comprimento medido por um observador em movimento em relação ao objecto é inferior ao comprimento próprio.

Considere-se o exemplo de uma nave que se desloca entre duas estrelas fixas a uma velocidade constante  $v$ . No referencial das referidas estrelas a sua distância é  $L_p$  e a nave

demora o tempo  $\Delta t$  a ir de uma estrela até à outra. Tem-se  $\Delta t = L_p / v$ . No referencial da nave, o tempo para percorrer a distância entre as estrelas é  $\Delta t_p$  e para o observador da nave a sua distância é  $L$ . Será  $\Delta t_p = L / v$ . Atendendo a (3.5) é  $\Delta t = \gamma \Delta t_p$ , ou seja  $L_p / v = \gamma L / v$ , donde se obtém

$$L = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_p / \gamma \quad (3.7)$$

Esta expressão diz que um objecto de comprimento próprio  $L_p$ , quando em movimento na direcção do seu comprimento é observado como tendo um comprimento inferior  $L$ , dado por (3.7).

### 3.5.6. O diagrama espaço-tempo

É costume representar a localização de um evento por um ponto P num diagrama  $(O, x, y, z, t)$  quadridimensional. Como no entanto a nossa geometria é tridimensional, apenas é possível efectuar esta representação a 3D, como se mostra na figura. Repare-se que o eixo do tempo está multiplicado por  $c$ , para se terem todos os eixos com a mesma ordem de grandeza, quando se tratar de velocidades próximas de  $c$ . À trajectória de P, ao longo de  $x, y, z$ , e  $ct$  dá-se o nome de **linha do Universo**.

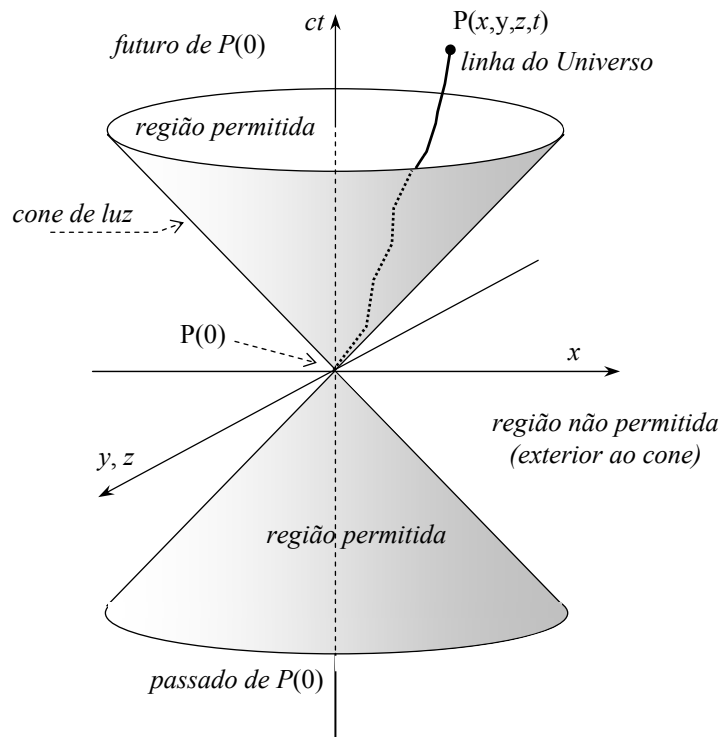


Fig. 3.5 – O diagrama espaço-tempo

### 3.5.7. O efeito de Döppler

O efeito de Döppler consiste no desvio de frequência observado numa onda progressiva, quando existe um movimento relativo entre a fonte e o observador. O caso que aqui interessa é o de ondas electromagnéticas, que se propagam com velocidade  $c$ , independentemente do estado de movimento do referencial onde se encontra a fonte. No caso do observador se deslocar em direcção à fonte, devido à sua velocidade, atinge mais depressa as ondas do que se estivesse em repouso. A frequência observada,  $f_o$ , parece maior do que a da fonte,  $f_s$ , que ele observaria se estivesse em repouso. É o chamado *efeito de Döppler longitudinal*:

$$f_o = \frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}} f_s \quad (3.8)$$

Se o observador se afasta da fonte é  $f_o < f_s$ . Pode usar-se a expressão (3.8), substituindo  $v$  por  $-v$ .

Expressa em termos de comprimento de onda da radiação electromagnética a expressão anterior transforma-se em, para quando o observador se afasta,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (3.9)$$

Se o observador se desloca numa direcção perpendicular à linha que o une à fonte tem-se o chamado *efeito de Döppler transversal*:

$$f_o = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} f_s = f_s / \gamma \quad (3.10)$$

O efeito de Döppler já era conhecido de há muito tempo. Mesmo não utilizando as expressões relativistas foi este efeito que forneceu a Bradley, em 1727, a primeira prova do movimento de translação da Terra.

Também já era conhecido dos astrónomos o deslocamento de riscas espectrais de luz proveniente de galáxias, para o lado dos infravermelhos (cerca de 100 nm). O astrónomo Hubble<sup>(23)</sup> efectuou um grande número de observações sobre o *desvio* destas riscas, e concluiu, com o auxílio das fórmulas do efeito de Döppler, que as referidas galáxias se afastavam da Terra a grande velocidade, tanto maior quanto maior a distância a que se encontram de nós.

## 3.6. Transformações de Lorentz

As equações de transformação de Lorentz<sup>(24)</sup> permitem a obtenção das coordenadas ( $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$ ) de um evento num referencial de inércia  $S'$  a partir do conhecimento das coordenadas ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ) do mesmo evento noutro referencial de inércia  $S$  com velocidade  $v$  em relação a  $S'$ . Há também um conjunto de equações para converter as velocidades de um objecto nos dois referenciais.

<sup>23</sup> Edwin Hubble, astrónomo americano, 1889-1953.

<sup>24</sup> Hendrik Lorentz, físico holandês, 1853-1928.

### 3.6.1. Equações de transformação de coordenadas

Considerem-se dois referenciais de inércia  $S$  e  $S'$ , tal como foi apresentado anteriormente em 3.2.  $S'$  é escolhido com os eixos  $(x', y', z')$  paralelos aos seus eixos homólogos em  $S$ ,  $O'$  deslocando-se segundo  $Ox$  e com  $O$  e  $O'$  coincidentes no instante  $t = 0$ . Seja  $v$  a velocidade de  $O'$  em relação a  $S$ , constante por se tratar de referenciais de inércia. A relação entre as coordenadas  $(x', y', z', t')$  do evento em  $S'$  e as coordenadas  $(x, y, z, t)$  do evento em  $S$ , designada por **transformação de coordenadas de Lorentz** foi obtida em 1887 por V. Voigt, em 1900 por J. Larmor, em 1904 por H. Lorentz e em 1905 por A. Einstein, aqui já no contexto da Teoria da Relatividade restrita, e é dada por

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (3.11)$$

Estas equações também são chamadas **equações de transformação espaço-tempo de Lorentz**.

A obtenção das equações acima pode ser feita com base nos seguintes passos:

1. Começa-se por considerar o caso geral em que os referenciais de inércia têm uma orientação qualquer: devido à homogeneidade do espaço as equações de transformação deverão ser lineares nas coordenadas, isto é

$$x'_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^4 a_{ij}x_j \quad (3.12)$$

em que  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = t$ ,  $x'_1 = x'$ , .. e  $i = 1, 2, 3, 4$ . Os 20 coeficientes  $a_{ij}$  poderão ser funções de  $v$ .

2. Escolhem-se os referenciais de modo que a passagem das origens de  $S'$  e  $S$  uma pela outra corresponda às coordenadas  $(0, 0, 0, 0)$  em  $S'$  e  $(0, 0, 0, 0)$  em  $S$ . Esta escolha conduz a  $a_{i0}=0$ , ficando os coeficientes reduzidos a 16.
3. Escolhem-se os eixos como indicado acima: Os referenciais deslocam-se segundo  $x$ . O número de coeficientes fica assim reduzido a 10.
4. Para um observador em  $S$  o plano  $O' y' z'$  dista do plano  $O, y, z$  de  $vt$ . Fica-se assim com apenas

$$x' = a_{11}(x - vt), \quad y' = a_{22}y, \quad z' = a_{33}z, \quad t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$

5. A transformação inversa deve ser do mesmo tipo. Resolvendo algebricamente o sistema anterior em relação a  $x, y, z, t$ , para ter o mesmo aspecto deverá ser  $a_{42}=a_{43}=0$  e ainda  $a_{44}=a_{11}$ .
6. Notando que o intervalo  $ds$  é um **invariante** (devido à constância da velocidade da luz):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2$$

substituindo nele os valores de  $x', y', z', t'$  dados acima e igualando os termos correspondentes obtém-se

$$a_{22} = 1, \quad a_{33} = 1, \quad a_{11}^2 + a_{44}^2 c^2 = 1 \quad a_{11}^2 - a_{22} a_{41} c^2 = 0 \quad a_{11}^2 v^2 - a_{41}^2 c^2 = -c^2$$

que resolvido em ordem a  $a_{11}, a_{22}, a_{41}$  e  $a_{44}$  ( $a_{44} = a_{11}$ ) dá origem às equações (3.11).

A transformação de Lorentz pode ser apresentada na forma matricial. Para tal é costume designar-se por  $\beta$  a velocidade relativa dos referenciais em relação à velocidade da luz,  $\beta = v/c$ , e efectuar-se a seguinte mudança de variável na coordenada tempo:  $\tau = ct$ . As equações (3.11) tomam então o aspecto

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \tau' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \tau \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.6.2. Equações de transformação de velocidade

Estas equações permitem a obtenção da velocidade de um objecto num referencial de inércia  $S'$  a partir do conhecimento da velocidade do mesmo objecto noutro referencial de inércia  $S$  com velocidade  $v$  em relação a  $S'$ . A velocidade do objecto é designada por  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$ , respectivamente em  $S$  e  $S'$ . Utiliza-se a notação  $u_x = dx/dt, \dots$

Calcule-se  $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ . A partir de (3.11) tem-se  $dx' = \gamma(dx - vdt)$  e  $dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)$ , pelo que

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}$$

ou, finalmente

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2})} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2})} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

As expressões (3.15) e (3.16) obtêm-se de forma análoga à (3.14).

### 3.7. Momento linear e leis de Newton

Na Física Clássica o momento linear de uma partícula (ou de um corpo) de massa  $m$  e velocidade  $u$  é definido pela expressão

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad (3.17)$$

O momento linear de um sistema de partículas obtém-se pela soma dos momentos lineares de cada uma das partículas. Ainda neste contexto, sempre que ocorre uma colisão entre partículas, o momento linear do conjunto de partículas mantém-se constante. A expressão que traduz a relação entre força aplicada a uma partícula e o seu momento linear, conhecida como 2ª lei de Newton tem a forma

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.18)$$

Esta expressão, da qual a lei da conservação do momento linear durante uma colisão é apenas um corolário (porque durante a colisão não há forças externas a exercer-se sobre as partículas), é válida em qualquer referencial de inércia, em que os sistemas de coordenadas estão relacionados pela transformação de Galileu. Se os referenciais de inércia tiverem entre si um movimento relativo com velocidades elevadas da ordem de  $c$ , em que é a transformação de Lorentz a relacionar as coordenadas, há necessidade de alterar a definição de momento linear, para que se continue a verificar a 2ª lei de Newton. É preciso também, na nova definição de momento linear, que este se transforme no momento linear clássico, sempre que  $u \ll c$ . A definição de **momento linear** que satisfaz estas condições é seguinte:

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.19)$$

Com esta definição para o momento linear verificam-se as seguintes condições:

- A relação entre a força aplicada a uma partícula e o seu momento linear continua a ser dada pela expressão (3.18).
- Numa colisão de partículas o momento linear mantém-se constante, independentemente do referencial que se utiliza.
- O momento linear tende para infinito quando  $u \rightarrow c$ .
- O momento linear relativista, dado por (3.19) transforma-se no momento linear clássico (3.17) sempre que  $u \ll c$ .

Considere-se agora uma partícula massa  $m$  sobre qual se exerce uma força  $\mathbf{F}$  constante e determine-se a sua aceleração. Será por definição de aceleração

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (3.20)$$

Derive-se a expressão (3.19), que define o momento linear:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d}{dt} \left[ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u} \right] \quad (3.21)$$

Após alguma manipulação obtém-se

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (3.22)$$

Pelo que

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \mathbf{a} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3.23)$$

Atendendo a (3.18) resulta

$$\mathbf{a} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (3.24)$$

Prepara-se nas seguintes conclusões, obtidas a partir de (3.24):

- Sempre que  $u \ll c$  a expressão (3.24) transforma-se na expressão clássica  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .
- Quando a velocidade  $u \rightarrow c$  a aceleração da partícula sujeita a uma força constante tende para zero. Isto significa que não é possível acelerar uma partícula até à velocidade  $c$ .

Para calcular velocidade de uma partícula cuja aceleração é dada por (3.24) deverá integrar-se a sua aceleração. De modo análogo se calcula a sua posição.

### 3.8. Energia

A expressão da energia de uma partícula obtém-se a partir da definição do trabalho exercido por uma força e da expressão relativista do momento linear. Mantém-se a definição clássica de trabalho,  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

Para simplificar considere-se o problema a uma dimensão espacial  $x$ , e calcule-se o trabalho realizado pela força para transportar uma partícula da posição  $x_1$  até à posição  $x_2$ . Será

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (3.25)$$

Em que  $F$  é componente da força segundo  $x$ . Atendendo a (3.18) pode escrever-se

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx \quad (3.26)$$

Atendendo a (3.22), e supondo que a partícula se encontra em  $x_1$  quando  $t = 0$  e em  $x_2$  no instante  $t$ , vem,

$$W = \int_0^t \underbrace{m \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{dt}}_{\frac{dp}{dt}} \underbrace{\frac{u dt}{dx}}_{dx} = m \int_0^u \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} du \quad (3.27)$$

onde se supõe que no instante  $t = 0$  a velocidade é zero e no instante  $t$  é  $u$ . A integração de (3.27) conduza a

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 \quad (3.28)$$

Uma vez que o trabalho efectuado pela força produz uma variação de energia cinética da partícula, suposta zero em  $t = 0$ , pode escrever-se, depois de simplificar

$$E_C = \gamma mc^2 - mc^2 \quad (3.29)$$

ou ainda,

$$E_C = (\gamma - 1) mc^2 \quad (3.30)$$

Analise-se o que se passa com (3.29) quando  $u \ll c$ . Para esse efeito desenvolva-se  $\gamma$  em série de potências de  $u^2/c^2$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1 + \frac{u^2}{c^2} + 3 \left(\frac{u^2}{c^2}\right)^2 + \dots \approx 1 + \frac{u^2}{c^2} \quad (3.31)$$

Substituindo a aproximação de  $\gamma$  com os termos de 1ª ordem do desenvolvimento vem

$$E_C = \left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right) mc^2 - mc^2 = \frac{1}{2} mu^2 \quad (3.32)$$

que é expressão clássica da energia cinética.

Na expressão (3.29) ao 2º termo do 2º membro, que não depende da velocidade da partícula, dá-se o nome de **energia em repouso** da partícula,  $E_R$ :

$$E_R = mc^2 \quad (3.33)$$

Definindo **energia total** da partícula,  $E_T$ , pela expressão

$$E_T = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.34)$$

fica a relação

$$E_T = E_C + E_R \quad (3.35)$$

A expressão (3.35), diz que para uma partícula material de massa, a sua energia total é dada pela soma da energia cinética e da energia em repouso.

A relação (3.34) é famosa **relação de Einstein**, que estabelece a equivalência entre a massa de uma partícula e a sua energia total.

Quando a energia cinética da partícula é nula, a sua energia total reduz-se à energia em repouso.

Da expressão (3.33) conclui-se que existe uma relação entre a massa e a energia de uma partícula, sendo o factor de conversão a constante  $c^2$ , quadrado da velocidade da luz no vazio. Isto significa, que a uma pequena quantidade de massa corresponde uma enorme quantidade de energia.

Muitas vezes não se mede a velocidade de uma partícula mas sim o seu momento linear. Por este motivo convirá estabelecer a relação entre o momento linear e a energia. Designado agora a energia total por  $E$ , a expressão (3.34) pode escrever-se

$$\frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (3.36)$$

Elevando ao quadrado as expressões (3.36) e (3.19) e subtraindo membro a membro resulta, depois de simplificar

$$E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2 \quad (3.37)$$

Analise-se expressão anterior. Quando a partícula se encontra em repouso ( $p = 0$ ) fica  $E = mc^2$ , como já se tinha visto em (3.33). Para partículas de massa nula (como por exemplo o fóton), fazendo na equação  $m = 0$  resulta

$$E = pc \quad (3.38)$$

Para estes casos a expressão (3.34) daria uma **indeterminação**, já que o fóton se move à velocidade  $u = c$ .

Note-se que a massa de uma partícula ou de um objecto não depende da sua velocidade; a massa tem o mesmo valor em qualquer referencial de inércia. Por este motivo se diz que a massa é um **invariante** relativista.

O momento linear e a energia de uma partícula (ou de um sistema de partículas) variam com a velocidade, não sendo pois invariantes. No entanto a quantidade

$$E^2 - p^2 c^2 \quad (3.39)$$

obtida directamente a partir de (3.37) é um invariante relativista.

Não sendo o momento linear e a energia invariantes relativistas, é importante saber como é que estas grandezas se transformam quando se muda de referencial de inércia. Represente-se por  $v$  a velocidade do referencial  $S'$  em relação ao referencial  $S$ , para o caso da pág.2. É corrente introduzir um vector, designado por **quadrivector momento-energia**, com as seguintes componentes:

$$\left[ -p_z, -p_x, -p_y, \frac{E}{c} \right] \quad (3.40)$$

Representa como anteriormente por  $\beta$  a velocidade relativa dos referenciais (em relação à velocidade da luz,  $\beta = v/c$ ), a transformação da energia e do momento linear escreve-se:

$$\begin{bmatrix} -p'_x \\ -p'_y \\ -p'_z \\ \frac{E'}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta \\ \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \\ \frac{E}{c} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Isto significa que as componentes do momento linear e a energia se relacionam, em referenciais de inércia, por meio da transformação de Lorentz.

### 3.9. Electromagnetismo e relatividade

Sabe-se da teoria do campo electromagnético que a força que se exerce sobre uma partícula electricamente carregada com carga  $q$  é dada pela expressão

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.42)$$

Em que a primeira parcela  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$  é devida ao campo eléctrico e a segunda é devida ao campo magnético. Esta última, ao depender da velocidade da partícula irá depender do referencial que esteja a ser considerado. Exemplifique-se com dois referenciais, um em que a partícula se move com velocidade  $v$  e o outro o referencial associado à própria partícula, no qual a sua velocidade é nula. Um observador que se encontre neste último referencial,  $S'$ , apenas consegue detectar uma eventual força eléctrica,  $\mathbf{F}'_E = q\mathbf{E}'$ . Um observador que se encontre em  $S$  encontrará a actuar sobre a partícula a força  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Uma vez que a força se encontra a actuar sobre a partícula, independentemente do referencial em causa, somos assim levados a concluir que a força eléctrica é transformada numa força magnética, ou ainda, que um campo eléctrico é transformado num campo magnético, apenas por mudança de referencial.

Considere-se agora o exemplo de um condutor eléctrico atravessado por uma corrente eléctrica contínua,  $I$ . Num metal a corrente eléctrica é devida ao movimento dos seus electrões livres, que se movimentam no sentido oposto ao convencional para sentido positivo da corrente, com uma velocidade média  $v$ . No referencial do condutor, a corrente eléctrica  $I$  origina um campo magnético  $\mathbf{B}$ , de simetria cilíndrica, cujo sentido pode ser obtido pela regra do saca-rolhas. O condutor encontra-se electricamente neutro, isto é, o número de cargas eléctricas positivas é igual ao número de cargas negativas, e portanto não existe qualquer campo eléctrico no exterior do condutor.

Considere-se agora uma carga eléctrica  $q$  exterior ao condutor, movimentando-se paralela a ele com uma velocidade  $v$  igual à velocidade média dos electrões que originam a corrente  $I$ . Sobre esta carga irá exercer-se uma força magnética dada por  $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , perpendicular ao condutor e dirigida para fora, como se mostra na figura seguinte, a).

No referencial da carga  $q$ , em relação ao qual o condutor se encontra em movimento com velocidade  $-\mathbf{v}$ , a situação é diferente da descrita: não existe força magnética, uma vez que no seu referencial a carga se encontra parada, os electrões também se encontram parados (uma vez que, por hipótese,  $q$  se encontra em movimento com a velocidade destes); no entanto as cargas positivas, que se encontram fixas em relação ao condutor, movem-se com velocidade  $-\mathbf{v}$ , pelo que a correspondente densidade de carga (cargas positivas) é muito maior do que vista no referencial do condutor. Haverá assim um campo eléctrico devido a estas cargas, também dirigido do eixo do condutor para o seu exterior, como se mostra na figura, b). Note-se que devido ao efeito relativista há uma contracção destas cargas, o que faz aumentar a sua densidade de carga e, consequentemente o valor de  $\mathbf{E}$ .

Tem-se aqui um exemplo de como um campo electromagnético pode ser visto quer como apenas campo magnético, quer apenas como campo eléctrico.

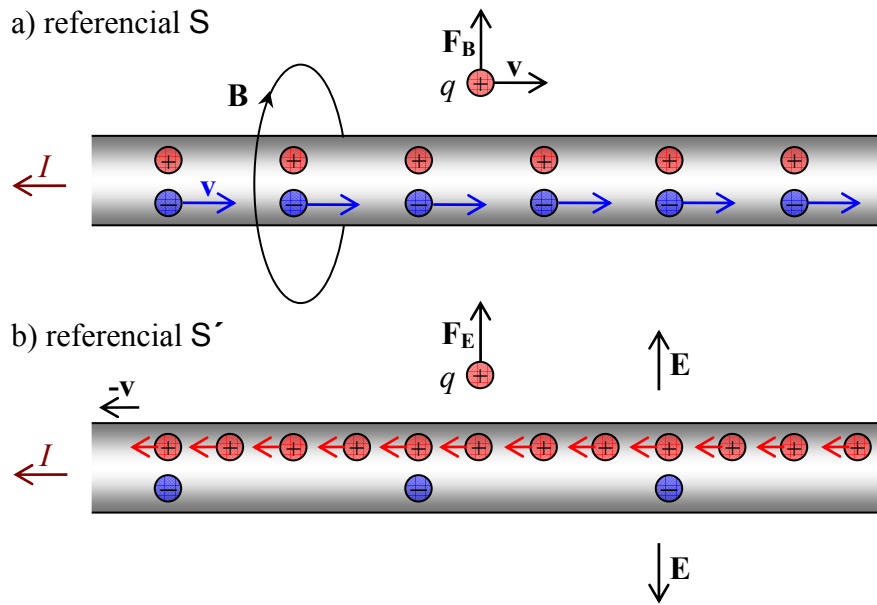


Fig. 3.6 – Um campo magnético visto como campo eléctrico

Na página 2 afirmou-se que as equações de Maxwell do Electromagnetismo são relativistas. Considerem-se as equações de Maxwell na forma diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{D} = \rho \end{array} \right. \quad (3.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

E procure-se saber como é que os campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$  se transformam de um referencial de inércia para outro. Para poder prosseguir com estes cálculos torna-se necessário escrever estas equações numa outra forma, por exemplo na forma diferencial, para se poder perceber o modo como os campos dependem das coordenadas de espaço (das suas derivadas).

No referencial  $\mathbf{S}$  as coordenadas são  $(x, y, z, t)$  e os campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$ .

No referencial  $\mathbf{S}'$  as coordenadas são  $(x', y', z', t')$  e os campos  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{D}'$ ,  $\mathbf{H}'$  e  $\mathbf{B}'$ .

Prova-se, após alguns cálculos elaborados, que para que em ambos os referenciais as equações se escrevam com o aspecto (3.43) a (3.46) é necessário que as coordenadas de espaço e tempo estejam ligadas pela transformação de Lorentz (3.13), para o caso em que  $x'$  se move segundo  $x$ . Mais se pode provar que a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas  $c$ , que intervém nas equações de propagação de Laplace, é a mesma em qualquer referencial de inércia. Estas conclusões foram também um factor que contribuiu para o estabelecimento dos postulados de Teoria da Relatividade Restrita.

### 3.10. Teoria da relatividade generalizada

Na Mecânica Clássica surgiram duas formas distintas de definir o conceito de massa:

1. **Massa gravitacional**,  $m_g$  – caracterizada pela força a atracção existente entre corpos, tal como descrita pela Lei da Atracção Universal.
2. **Massa inercial**,  $m_i$  – definida a partir da 2ª lei de Newton, caracterizada pela maior ou menor oposição que um corpo oferece quando uma força lhe procura modificar o seu estado de movimento.

Estes conceitos, embora distintos, por meio de uma escolha adequada da constante  $G$  da Lei da Atracção Universal conduzem ao mesmo valor numérico para a massa. Tudo se passa como se os conceitos fossem apenas um, observados de pontos de vista diferentes.

Este problema ocupou o tempo de muitos cientistas, em particular o de Newton, mas só foi solucionado por Einstein, no seu trabalho sobre a Teoria da Relatividade Generalizada, em que se afirma não só existe coincidência entre os valores de  $m_g$  e  $m_i$ , como eles representam um mesmo e único conceito.

A ideia que serve a base a esta unificação é seguinte: nenhuma experiência, quer seja mecânica ou de outro tipo, pode distinguir entre estes dois tipos de massas.

Concretize-se esta afirmação com um exemplo. Considere-se um observador no interior de uma nave, que se encontra parada à superfície da Terra. A nave é fechada e o observador não tem acesso ao sistema de localização, pelo que não sabe onde se encontra. Este observador encontra-se sujeita à acção do campo gravítico terrestre, caracterizado por  $\mathbf{g}$ . No interior desse veículo qualquer corpo livre de outras forças adquire uma aceleração igual a  $\mathbf{g}$ .

Desloque agora o veículo para uma região (afastada da Terra) onde não se faça sentir o efeito de gravidade terrestre, e imobilize-se o veículo (em relação ao referencial terrestre). O observador no interior do veículo dirá que não está sujeito a nenhuma uma força gravítica.

Ponha-se agora veículo em movimento e imprima-se-lhe que uma aceleração vertical de baixo para cima (baixo significa chão da nave), com a mesma grandeza de  $\mathbf{g}$ . O observador, volta a detectar uma força vertical de cima para baixo, de valor  $\mathbf{g}$ , e uma vez que nada lhe foi dito sobre a origem desta nova força, poderá julgar que se encontra submetido ao campo gravítico terrestre. A conclusão que foi generalizada a partir desta experiência é a seguinte:

***Nenhuma experiência realizada localmente num referencial, pode estabelecer qualquer diferença entre massa gravítica e massa inercial.***

Atendendo a esta e outras considerações, a maior parte delas matematicamente algo complexas, que Einstein estabeleceu a Teoria da Relatividade Generalizada com base em dois princípios:

- P1 – **Princípio da relatividade geral** – as leis da física devem permanecer inalteradas em todos referenciais (quer sejam de inércia ou não).
- P2 – **Princípio da equivalência** – Na vizinhança de qualquer ponto, um campo gravitacional é equivalente a um referencial acelerado onde não há efeitos gravitacionais.

Como para o caso da Relatividade Restrita o 1º princípio afirma que as leis da Física devem ter o mesmo aspecto, isto é, permanecer inalteradas em todos referenciais, mesmo que não sejam referenciais de inércia. Faz também a generalização para as leis da Mecânica do Electromagnetismo, da Termodinâmica, da Biologia, etc.

O segundo princípio implica a equivalência total entre os conceitos de massa gravítica e massa inercial: elas não só têm o mesmo valor numérico como ***são exactamente a mesma coisa***.

Analise-se um caso interessante em que existe interacção entre o campo gravítico e a luz.

Imagine-se de novo um observador no interior de uma nave, em movimento acelerado dirigido no sentido do chão para o tecto da nave. Suponha-se que o observador envia um raio de luz segundo a horizontal, ou seja, segundo uma direcção perpendicular à aceleração. Se a nave se encontrasse parada o raio iria projectar-se na parede lateral, num determinado ponto. Se o referencial associado à nave fosse um referencial de inércia (não acelerado) com velocidade constante no sentido ascendente, o raio de luz iria incidir num ponto abaixo do ponto anterior, uma vez que este demora um certo tempo efectuar o percurso entre a fonte e o alvo e durante esse tempo a nave se terá deslocado para cima. A trajectória do raio luminoso será rectilínea.

Se a nave se encontrar em movimento uniformemente acelerado, de baixo para cima, o raio de luz anterior irá descrever uma trajectória parabólica. Com efeito, para percursos iguais da luz (na horizontal), há percursos cada vez maiores da nave, uma vez que o seu movimento é acelerado.

Se agora se notar que não há possibilidade, de acordo com o segundo princípio, de saber se a nave se encontra em movimento uniformemente acelerado ou se se encontra sujeita a um campo gravítico, somos levados a concluir que sob a acção do campo gravítico um feixe de luz será também deflectido, descrevendo uma trajectória curvilínea (parabólica num campo constante e uniforme). Esta conclusão pode ser observada à superfície da Terra. Um feixe de luz laser emitido na horizontal sofre uma deflexão de um milímetro para baixo, depois percorrer 600 quilómetros na horizontal.

A primeira verificação experimental da deflexão da luz por um campo gravítico foi feita em 1919, quando os astrónomos de uma expedição Britânica à África Central, que aí se deslocaram para observar um eclipse solar total, detectaram que luz proveniente de uma determinada estrela era deflectida de 1,75" (segundos de grau), pelo facto de efectuar um percurso tangente ao Sol. O anúncio desta observação tornou Einstein famoso, pois ela serviu como prova experimental da Teoria da Relatividade Generalizada.

Como se pode constatar, a deflexão que a luz sofre ao atravessar um campo gravitacional parece pequena. Tal é efectivamente o caso, quando se trata do campo gravítico terrestre ou até mesmo do campo gravitacional do Sol. Mas no universo há milhões de corpos com massa muito superior à massa do sol. Há muitos casos em que o campo gravitacional de um corpo é de tal modo intenso que deflecte a luz na direcção desse corpo, e nem sequer deixa lá sair a própria luz. A estes corpos dá-se o nome de buracos negros.



### 3.11. Problemas resolvidos

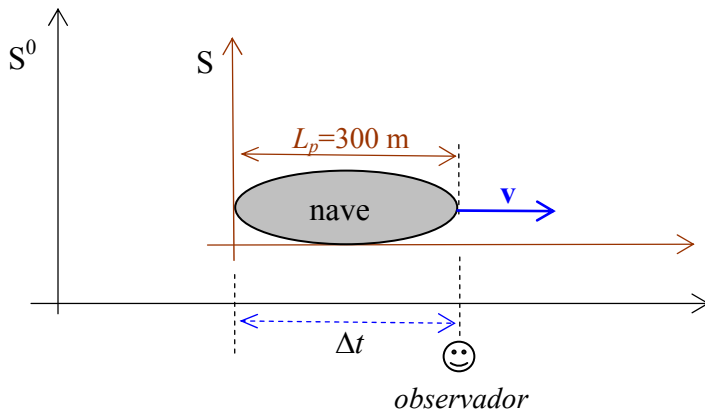
#### 3.11.1. Probl. 3.1 – Comprimento próprio

Uma nave espacial, com o comprimento próprio de 300 m, demora 0,750 μs a passar por um observador terrestre.

- Calcule a sua velocidade, medida por este observador.
- De acordo com este observador, qual o comprimento da nave?

RESOLUÇÃO:

a)



$$L_p = 300 \text{ m}$$

$$\Delta t = 0,750 \text{ } \mu\text{s}$$

O observador terrestre vê a nave com o comprimento  $L$ , inferior a  $L_p$ , ou seja, vê a nave mais curta do que ela é:

$$L = L_p \gamma^{-1}$$

com 
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para este observador é  $L = v \Delta t$ , pelo que, igualando as duas expressões de  $L$

$$L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v \Delta t \rightarrow L_p^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = v^2 \Delta t^2 \rightarrow \frac{\Delta t^2}{L_p^2} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \rightarrow v^2 = \frac{1}{\frac{1}{c^2} + \frac{\Delta t^2}{L_p^2}} \rightarrow$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\Delta t^2}{L_p^2}}}$$

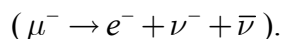
Substituindo valores numéricos

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9 \times 10^{16}} + \frac{0,75^2 \times 10^{-12}}{300^2}}} \rightarrow v = 0,8c$$

$$\text{b) } L = L_p \gamma^{-1}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = 1,667 \rightarrow L = 300 \times / 1,6667 = 180 \text{ m}$$

### 3.11.2. Probl. 3.2 – Tempo próprio

Um muão, formado na alta atmosfera terrestre, percorre uma distância de 4,60 km, à velocidade  $v = 0,99c$ , antes de se transformar em electrão+neutrino+antineutrino



- a) Qual o tempo de vida deste muão no referencial terrestre e no referencial próprio?  
 b) No referencial do muão, que espaço é que ele percorreu?

*RESOLUÇÃO:*

- a) No referencial terrestre o tempo de vida do muão calcula-se dividindo o espaço percorrido pelo muão (desde que se forma até que se desintegra) pela sua velocidade:

$$\Delta t = \frac{L_p}{v} = \frac{4600}{0,99 \times 3 \times 10^8} \text{ s} = 15,49 \mu\text{s}$$

No referencial do muão há uma dilatação do intervalo de tempo (o tempo corre mais devagar), relativamente ao observador terrestre:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \rightarrow \Delta t_p = \gamma^{-1} \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \Delta t_p = \frac{15,49 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0,99)^2}} = 2,18 \mu\text{s}$$

- b) No referencial do muão observa-se a superfície terrestre a aproximar-se à velocidade  $v$ . O espaço percorrido pode ser calculado de dois modos:

$$1. L = v \Delta t_p = 0,99 \times 3 \times 10^8 \times 2,18 \times 10^{-6} \text{ m} = 648 \text{ m}$$

$$2. L = L_p \times \gamma^{-1} = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 4600 \times \sqrt{1 - 0,99^2} \text{ m} = 648 \text{ m} \text{ (nota: } L_p \text{ é o comprimento próprio, é medido na Terra).}$$



### 3.11.4. Probl. 3.4 – Diagrama espaço-tempo, 2D

Um electrão descreve, no eixo dos  $xx$ , um movimento oscilatório, sinusoidal no tempo, com uma amplitude  $A = 12$  cm.

- Qual a frequência máxima,  $f_M$  a que pode oscilar este electrão?
- Faça um esboço do seu diagrama espaço-tempo e represente no mesmo diagrama o “cone” de luz, as regiões permitida e não permitida, o passado e o futuro.
- No diagrama anterior represente o diagrama de um electrão a oscilar à mesma frequência, em oposição de fase e com metade da amplitude.

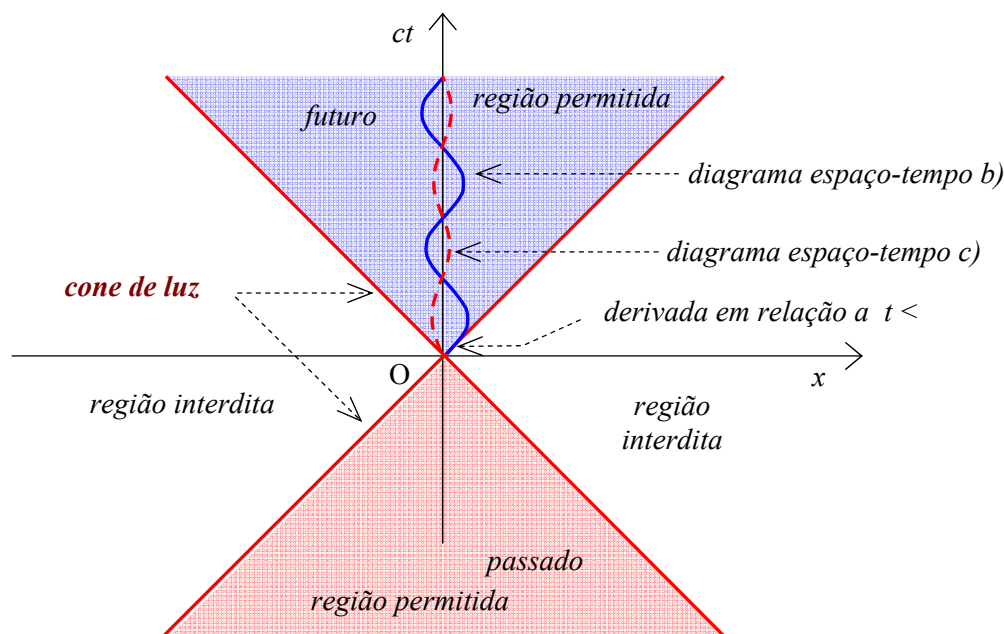
**RESOLUÇÃO:**

- Movimento do electrão:  $x = A \sin(\omega t)$ . Velocidade do electrão:  $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t)$ .

Velocidade na origem (máxima):  $v_M = A\omega$ . Esta velocidade não pode exceder  $c \rightarrow$

$$A\omega < c, \text{ ou seja } f < \frac{c}{2\pi A}. \text{ Para a amplitude dada será } f < \frac{3 \times 10^8}{2\pi \times 0,12} \rightarrow f_M = 397 \text{ MHz}$$

- O diagrama espaço-tempo deste electrão encontra-se representado na figura, a traço azul, cheio. Não é mais do que a representação de  $x$  em função de  $ct$  (sinusóide). Note-se que a derivada desta sinusóide, na origem, deverá ser tangente (interior) ao cone de luz (condição anterior  $A\omega < c$ ). Repare-se que por se tratar de um problema a uma dimensão espacial e outra temporal, o cone de luz degenera em duas rectas, que se cruzam no vértice.



- O diagrama encontra-se na figura, a traço vermelho interrompido.

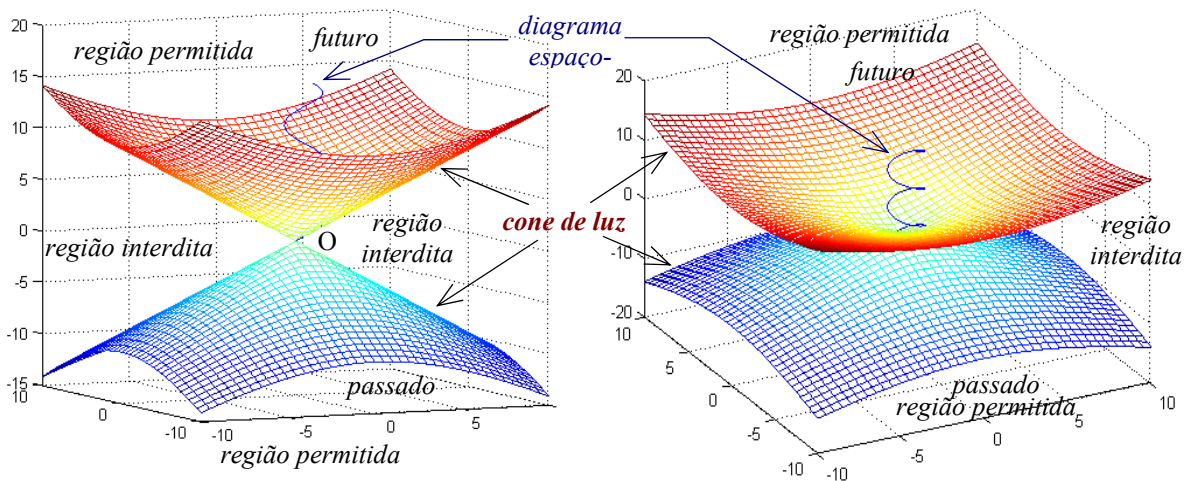
**3.11.5. Probl. 3.5 – Diagrama espaço-tempo, 3D**

Um electrão descreve, no plano  $(x,y)$ , um movimento circular uniforme com um diâmetro de  $D$  e uma frequência de 125MHz.

- Faça um esboço aproximado do seu diagrama espaço-tempo.
- No desenho mostre o cone de luz, as regiões permitida e não permitida, o passado e o futuro.
- Qual o máximo valor que pode ter  $D$ , de modo a que a trajectória do electrão se encontre na região permitida do diagrama?

**RESOLUÇÃO:**

- As duas figuras seguintes são pontos de vista diferentes dos mesmos diagramas. A linha em espiral, com início na origem, representa o diagrama espaço-tempo do electrão. Para uma melhor percepção, pode ser comparado, na forma, a uma mola que esteja parcialmente esticada e presa por dois pontos sobre a mesma geratriz do cilindro que a envolve. Um dos extremos será a origem do diagrama, ponto O, em que  $t=0, x=0, y=0$ .



- As figuras indicam o que se pede.
- Em termos da analogia dada com a mola, esta deverá estar suficientemente esticada e não ter um diâmetro grande, para que se desenvolva sempre dentro do cone. Em torno da origem pode supor-se, aproximadamente, que  $x$  (ou  $y$ ) são uma função sinusoidal do tempo:  $x = A \sin(\omega t)$ . A sua derivada em  $x=0$  deverá ser inferior à

inclinação do cone:  $\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t) \rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = A\omega \rightarrow A\omega < c \rightarrow A < \frac{c}{\omega} \rightarrow$

$$A < \frac{3 \times 10^8}{2 \times \pi \times 125 \times 10^6} \text{ m} \rightarrow A < 38 \text{ cm}$$

O diâmetro máximo permitido será  $2A$ .

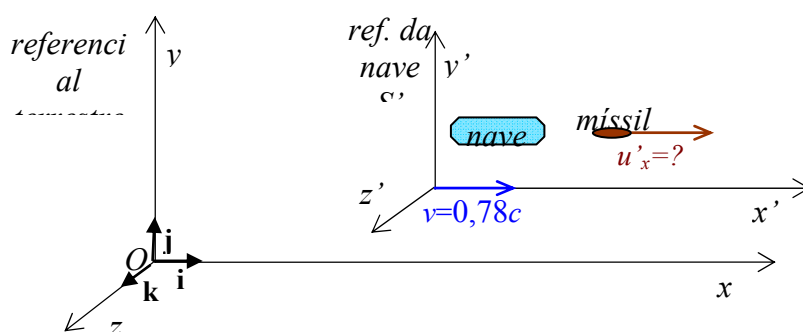
Poderia chegar-se à mesma conclusão sabendo que para o movimento circular se tem  $v = \omega R$  e que  $v_{max} = c$ , donde se obtém o valor máximo de  $R$ .

### 3.11.6. Probl. 3.6 – Composição de velocidades, 1

Uma nave espacial desloca-se, no referencial terrestre, à velocidade de  $0,78c$ . A certa altura a nave dispara um míssil, na direcção e sentido do seu movimento. Qual deverá ser a velocidade do míssil, em relação à nave, para que possa atingir a velocidade  $0,88c$  no referencial terrestre?

**RESOLUÇÃO:**

Trata-se de um problema de composição de velocidades



Velocidade da nave, no referencial terrestre:  $v$  (dado)

Velocidade do míssil no referencial terrestre:  $u_x$  (a determinar)

Velocidade do míssil no referencial da nave:  $u'_x$  (dado)

Fórmula de composição de velocidades, para os referenciais nas posições da figura:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

Substituindo valores numéricos resulta:  $u'_x = \frac{0,88c - 0,78c}{1 - \frac{0,88c \times 0,78c}{c^2}} \rightarrow u'_x = 0,3189c$

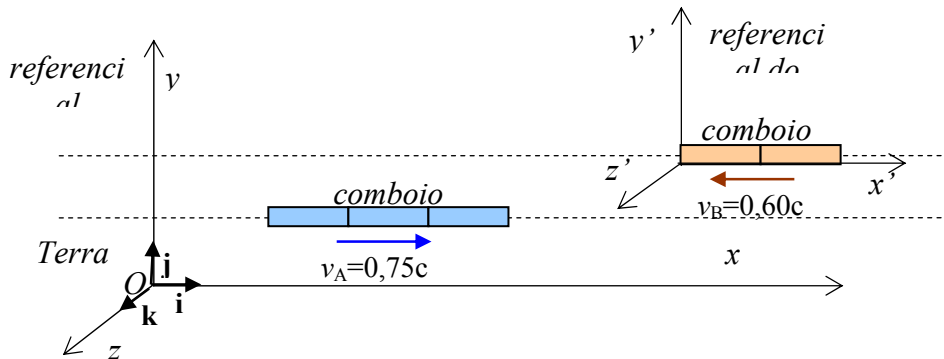
Nota: a teoria clássica daria  $u'_x = u_x - v = 0,88c - 0,78c = 0,10c$

### 3.11.7. Probl. 3.7 – Composição de velocidades, 2

O comboio A, de extra alta velocidade, com o comprimento próprio de 120 m, viaja à velocidade de  $0,75c$  e cruza-se (em sentido contrário) com o comboio B, igual a A, que circula a  $0,60c$ .

- Visto por um observador em terra, qual a velocidade relativa dos comboios?
- E visto por um observador que se encontre no comboio B qual a velocidade de A e qual o seu comprimento?
- E para um observador que se encontre no comboio A qual o comprimento e velocidade de B?

RESOLUÇÃO:



- a) Tal como se apercebe um observador terrestre, a velocidade relativa dos dois comboios é, apenas em módulos  $v_r = v_A - v_B = 0,75c - (-0,60c) = 1,35c$ . Este resultado resulta de se estar a supor, por analogia com a Mecânica Clássica, que a velocidade relativa dos comboios é igual em qualquer referencial de inércia, o que não acontece em Física Relativista. Para um observador no referencial terrestre apenas existem as velocidades dos comboios A e B, não a de A visto de B ou a de B visto de A. A solução correcta será a calculada a seguir.
- b) Considere-se um observador no comboio B, e o respectivo referencial, em movimento em relação ao referencial terrestre. A velocidade do referencial do comboio B em relação ao referencial terrestre é  $v_B = -0,60c$  (o sinal – resulta do movimento ser oposto ao versor  $\mathbf{i}$ ). A velocidade do comboio A é, no referencial terrestre,  $v_A = 0,75c$ . Utilizando a lei de composição de velocidades (apenas interessa a componente em  $x$ ), tem-se, para velocidade do comboio A em relação ao B

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{v_A - v_B}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}} = \frac{0,75c + 0,60c}{1 + \frac{0,75c \times 0,60c}{c^2}} = 0,931c$$

O comprimento do comboio A, observado de B, obtém-se a partir da expressão da contração do espaço:  $L = L_p / \gamma = L_p \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 120 \times \sqrt{1 - 0,931^2} = 43,8 \text{ m}$

- c) Para calcular o comprimento do comboio B, visto de A, utiliza-se a fórmula anterior. O valor de  $\gamma$  é igual, porque na sua expressão a velocidade se encontra elevada ao quadrado.  $L_B = L_{pB} / \gamma = 60 \times \sqrt{1 - 0,931^2} = 21,9 \text{ m}$ . Para a velocidade, deveremos obter um valor simétrico:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{v_B - v_A}{1 - \frac{v_A v_B}{c^2}} = \frac{-0,60c - 0,75c}{1 + \frac{0,75c \times 0,60c}{c^2}} = -0,931c$$

(Matlab: Cap3p07.m)

**3.11.8. Probl. 3.8 – Composição de velocidades, 3**

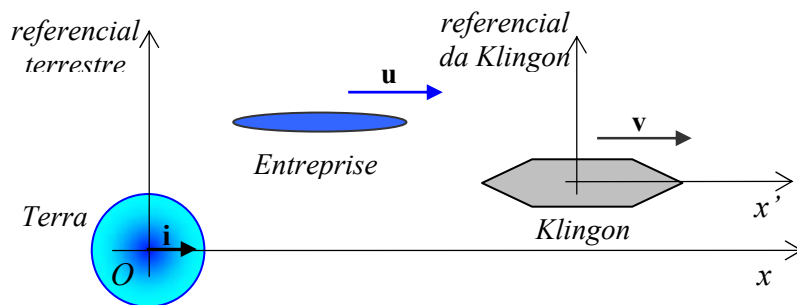
A nave espacial Klingon afasta-se da Terra à velocidade  $0,800c$ . A nave Enterprise persegue-a à velocidade de  $0,900c$ , em relação à Terra.

- a) Com que velocidade é que os observadores terrestres vêem a Enterprise a ultrapassar a Klingon?
- b) Com que velocidade é que a tripulação da Klingon vê a Enterprise a ultrapassá-la?
- c) E se as naves se estivessem a aproximar (a Klingon com sentido oposto)?

*RESOLUÇÃO:*

- a) No referencial terrestre as naves Enterprise e Klingon movem-se com velocidades  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  respectivamente. Os observadores terrestres julgam ver a nave Enterprise ultrapassar a nave Klingon com a velocidade relativa  $\mathbf{v}_r = \mathbf{u} - \mathbf{v} = 0,900 c \mathbf{i} - 0,800 c \mathbf{i} = 0,100 c \mathbf{i}$ .
- b) Trata-se de um problema de composição de velocidades, relativista. Comece-se por atribuir um referencial à nave Klingon, e para simplificar, orientem-se os eixos do referencial terrestre como se mostra na figura. O problema fica reduzido a uma dimensão espacial.

Para calcular a velocidade com que os observadores do referencial da nave Klingon vêem a Enterprise ultrapassá-los é necessário usar as leis de composição de velocidades relativistas:



$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2})} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{u_x v}{c^2})}$$

Como  $u_y$  e  $u_x$  são nulas, também o serão  $u'_y$  e  $u'_z$ , ficando apenas

$$u'_x = \frac{0,900c - 0,800c}{1 - \frac{0,900c \times 0,800c}{c^2}} = 0,357 c.$$

- c) Se as naves se aproximarem uma da outra o observador terrestre diria que

$$v_r = u + v = 0,900c + 0,800c = 1,700c.$$

No entanto a velocidade de aproximação de uma das naves, vista por quem está na outra, será

$$u'_x = \frac{0,900c + 0,800c}{1 + \frac{0,900c \times 0,800c}{c^2}} = 0,988c.$$

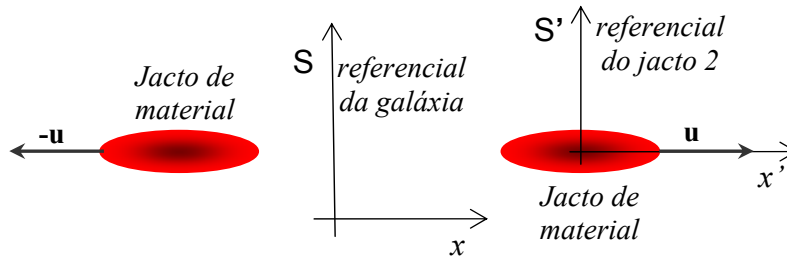
**3.11.9. Probl. 3.9 – Composição de velocidades, 4**

Dois jactos de material provenientes do centro de uma galáxia movem-se em direcções opostas, à velocidade de  $0,80c$  em relação a essa galáxia.

Determine a velocidade de um jacto em relação ao outro.

*RESOLUÇÃO:*

Faça-se o seguinte esquema:



Em relação ao referencial da galáxia,  $S$ , será:  $u_{1x} = -u$ ;  $u_{2x} = u$ .

Considere-se um referencial associado ao 2º jacto,  $S'$ :  $v = u$ .

A expressão de composição de velocidades escreve-se:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad \text{ou} \quad u'_{1x} = \frac{u_{1x} - v}{1 - \frac{u_{1x} v}{c^2}} = \frac{-u - v}{1 - \frac{-uv}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-1,6c}{1 + 0,8^2} = -0,976c$$

(Matlab: Cap3p09.m)

### 3.11.10. Probl. 3.10 – Simultaneidade

No referencial terrestre,  $S$ , há duas lâmpadas que emitem um impulso luminoso cada uma:

Lâmpada 1 – localizada em  $x_R = 13,00$  m emite um impulso vermelho, no instante  $t_R = 1,00 \times 10^{-9}$  s

Lâmpada 2 – localizada em  $x_B = 1,00$  m emite um impulso azul, no instante  $t_B = 9,00 \times 10^{-9}$  s

Num referencial  $S'$ , que se move em relação ao ref.  $S$  a velocidade constante no sentido do eixo dos  $xx$  ( $x' // x$  e para  $t = t' = 0$  é  $O = O'$ ), os impulsos de luz aparentam ocorrer ao mesmo tempo.

- Qual a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ ?
- Qual a posição das duas lâmpadas no referencial  $S'$ ?
- Em que instante é que o impulso vermelho é emitido, em  $S'$ ?

**RESOLUÇÃO:**

Trata-se um problema que mostra o conceito de simultaneidade depende do referencial. Resolve-se usando a transformação de coordenadas de Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

- a) A última equação é válida também para diferenças:  $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$ . Vai procurar-se o valor de  $v$  que anula  $\Delta t'$ .

$$\Delta t' = 0 \rightarrow \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = 0 \rightarrow v = \frac{\Delta t c^2}{\Delta x} = \frac{(1,00 \times 10^{-9} - 9,00 \times 10^{-9}) \times (3 \times 10^8)^2}{13,00 - 1,00} \text{ m/s} = -0,30 \times 10^8 \text{ m/s} = -0,10c$$

- b) Utiliza-se a 1ª equação da transformação de Lorentz:  $x' = \gamma(x - vt)$ . É preciso calcular  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,1^2}} = 1,0101$$

$$x'_R = \gamma(x - vt) = 1,01101 \times (13,00 - 0,30 \times 10^8 \times 1,00 \times 10^{-9}) \text{ m} = 13,101 \text{ m}$$

$$x'_B = \gamma(x - vt) = 1,0101 \times (1,00 - 0,30 \times 10^8 \times 9,00 \times 10^{-9}) \text{ m} = 0,737 \text{ m}$$

- c)  $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \rightarrow t'_R = 1,0101 \times (1,00 \times 10^{-9} - \frac{0,3 \times 10^8}{(3 \times 10^8)^2} \times 13,00) \text{ s} = -3,367 \times 10^{-9} \text{ s}$

**3.11.11. Probl. 3.11 – Momento linear**

Calcule o momento linear de um electrão que se move com as velocidades de:

- a)  $v = 0,010 c$ .
- b)  $v = 0,500 c$ .
- c)  $v = 0,900 c$ .

Compare os resultados com os que seriam obtidos pela Física Clássica.

*RESOLUÇÃO:*

O momento linear relativista de uma partícula de massa  $m$  e velocidade  $v$  é calculado por

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \text{ com } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ (na Física Clássica é apenas } \mathbf{p} = m \mathbf{v} \text{).}$$

O valor de  $m$  pode ser obtido da tabela de constantes:  $m = 9,109 \times 10^{-31}$  kg. Pode construir-se a seguinte tabela, para a sistematização das respostas às 3 alíneas:

	$p$ (clássico)	$\gamma$	$p$ (relativista)
a)	$p = 9,109 \times 10^{-31} \times 0,010 \times 3 \times 10^8$ Ns $= 2,7327 \times 10^{-24}$ Ns	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,01^2}} = 1,0001 \approx 1$	$p = 2,7327 \times 10^{-24} \times 1$ Ns $= 2,7327 \times 10^{-24}$ Ns
b)	$p = 9,109 \times 10^{-31} \times 0,5 \times 3 \times 10^8$ Ns $= 1,366 \times 10^{-22}$ Ns	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,5^2}} = 1,1547$	$p = 1,366 \times 10^{-22} \times 1,1547$ Ns $= 1,5777 \times 10^{-22}$ Ns
c)	$p = 9,109 \times 10^{-31} \times 0,9 \times 3 \times 10^8$ Ns $= 2,459 \times 10^{-22}$ Ns	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,9^2}} = 2,2942$	$p = 2,459 \times 10^{-22} \times 2,2942$ Ns $= 5,642 \times 10^{-22}$ Ns

**3.11.12. Probl. 3.12 – Ec clássica / Ec relativista**

Qual a velocidade máxima a que se pode deslocar uma partícula material para que as expressões da energia cinética clássica e relativista difiram de menos de 1%.

(sugestão: parta da expressão da  $E_C$  relativista e desenvolva-a em série de potências de  $v/c$ ).

*RESOLUÇÃO:*

$$\text{Energia cinética relativista: } E_{cR} = (\gamma - 1)mc^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$

$$\text{Energia cinética clássica: } E_{cC} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{O problema diz que deverá ser } \frac{E_{cR} - E_{cC}}{E_{cR}} < 0.01 \text{ (Exp 1)}$$

Uma vez que esta equação é complicada de resolver analiticamente, vai efectuar-se o desenvolvimento de  $\gamma$  em série de potências. Viu-se na teoria que se obtém a expressão clássica da energia cinética restringindo o desenvolvimento de  $\gamma$  na expressão relativista aos 2 primeiros termos. Para a resolução do problema podemos considerar para expressão relativista um desenvolvimento com 3 termos:

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \text{ em que } x = -\frac{v^2}{c^2}$$

$$\gamma = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} \text{ (3 termos)}$$

$$\text{Substituindo este valor de } \gamma \text{ na Exp 1 vem } \frac{\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - 1 \right) mc^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - 1 \right) mc^2} < 0.01 \rightarrow$$

$$\frac{\frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4}}{\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4}} < 0.01 \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{3}{8} \frac{v^2}{c^2}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \frac{v^2}{c^2}} < 0.01 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{8} \frac{v^2}{c^2} < 0.01 \times \frac{1}{2} + 0.01 \times \frac{3}{8} \frac{v^2}{c^2} \quad \rightarrow$$

$$0,99 \times \frac{3}{8} \frac{v^2}{c^2} < 0,01 \times \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad v < 0,116c$$

Deixa-se ao cuidado do leitor verificar que, usando a expressão exacta para a  $E_c$  relativista este valor satisfaz o pretendido.

**3.11.13. Probl. 3.13 – Desintegração de partículas, 1**

O píon é uma partícula subatômica que se desintegra originando um múon e um anti-neutrino. A reacção de desintegração escreve-se  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$ . Sabendo que as massas destas partículas são  $m_\pi = 270m_e$ ,  $m_\mu = 206m_e$  e  $m_{\bar{\nu}} = 0$ , em que  $m_e = 9,109 \times 10^{-31}$  kg representa a massa do electrão.

- a) Calcule a energia cinética do múon e do anti-neutrino.  
 b) Calcule a energia libertada durante esta reacção.  
 (sugestão: utilize a lei da conservação do momento linear).

**RESOLUÇÃO:**

O momento linear de uma partícula material (com massa) é dado por  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ . O

momento linear de uma partícula sem massa é dado por  $p = \frac{E}{c}$ . Antes da desintegração

o momento linear é zero (partícula em repouso). Depois da desintegração o momento linear do múon é igual em módulo ao do anti-neutrino, e tem o sentido oposto. Deverá ser então:

Pela conservação do momento linear:

Pela conservação da energia total:

$$\frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} = \frac{E_\nu}{c}$$

$$m_\pi c^2 = \frac{m_\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} + E_\nu$$

Eliminando  $E_\nu$  entre as duas expressões obtém-se  $\rightarrow m_\pi c = \frac{m_\mu c}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} + \frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}}$

Substituindo as massas pelos seus valores resulta  $270m_e = \frac{206m_e}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} + \frac{206m_e(v_\mu/c)}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} \rightarrow$

$$270 \times \sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}} = 206 \times (1 + \frac{v_\mu}{c}) \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}} = 0,76296 \times (1 + \frac{v_\mu}{c}) \rightarrow v_\mu = 0,264c.$$

Energia cinética do múon:  $E_c = (\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} - 1)m_\mu c^2 =$

$$(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,264^2}} - 1) \times 206 \times 9,109 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 1,751 \times 10^{-11} \text{ J} = 1,093 \times 10^8 \text{ eV}$$

E.cin. do anti-neutrino:  $\frac{E_\nu}{c} = \frac{m_\mu v_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} \rightarrow E_\nu = \frac{206 \times 9,109 \times 10^{-31} \times 0,264 \times (3 \times 10^8)^2}{\sqrt{1 - 0,264^2}} \rightarrow$

$$E_\nu = 4,622 \times 10^{-12} \text{ J} = 2,885 \times 10^7 \text{ eV}$$

b) Energia libertada durante a reacção:  $E = \Delta mc^2 = (270m_e - 206m_e)c^2 = 5,246 \times 10^{-12} \text{ J}$

### 3.11.14. Probl. 3.14 – Desintegração de partículas, 2

Uma partícula instável em repouso decompõe-se em dois fragmentos com as massas de  $2,50 \times 10^{-28}$  kg e  $1,67 \times 10^{-27}$  kg. Se o fragmento mais leve tiver a velocidade de  $0,895c$ , Qual a velocidade do outro fragmento?

**RESOLUÇÃO:**

O problema resolve-se utilizando o teorema do momento linear relativista, que neste caso particular em que não há forças exteriores aplicadas se reduz à conservação do momento linear, antes e depois da fragmentação:  $\mathbf{p}_{antes} = \mathbf{p}_{1depois} + \mathbf{p}_{2depois}$

$$\text{Momento linear: } \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

As massas são invariantes relativistas, Antes da decomposição da partícula será  $m = m_1 + m_2$ , admitindo que não há variação de energia. No entanto este valor não é necessário para o cálculo do momento linear antes da decomposição, uma vez que o seu valor é zero por ser  $\mathbf{v} = 0$ .

Os dois fragmentos deverão deslocar-se em sentidos opostos, para que a sua soma possa ser nula. Os seus módulos deverão ser iguais. Logo, será

$$\frac{m_1 v_1}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}} = \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1 - (v_2/c)^2}} \rightarrow \frac{1,67 \times 10^{-27} \times v_1}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}} = \frac{2,50 \times 10^{-28} \times 0,895c}{\sqrt{1 - (0,895)^2}} \rightarrow v_1 = 0,2877c$$

(Matlab: Cap3p14.m)

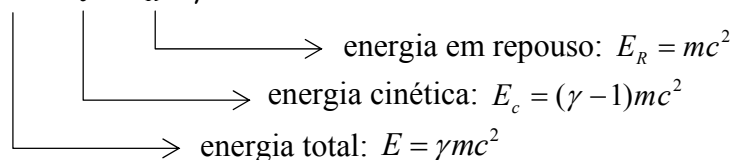
### 3.11.15. Probl. 3.15 – Energia de uma partícula

Um próton move-se à velocidade  $0,950c$ . Determine, expressa em joule e em electrão-volt:

- A sua energia em repouso.
- A energia total.
- A energia cinética.

**RESOLUÇÃO:**

$$E = E_c + E_R = \gamma m c^2$$



- De uma tabela de constantes obtém-se a massa do próton:  $m_p = 1,672 \times 10^{-27}$  kg

$$\text{Logo } E_R = 1,672 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} = 1,5048 \times 10^{-10} \text{ J} = 939 \text{ MeV}$$

- $E = \gamma E_R$ .  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,95^2}} = 3,2026 \rightarrow E = 3,2026 \times 1,5048 \times 10^{-10} \text{ J} = 4,819 \times 10^{-10} \text{ J} =$

$$3008 \text{ MeV}$$

- $E_c = E - E_R = 4,819 \times 10^{-10} - 1,5048 \times 10^{-10} \text{ J} = 3,314 \times 10^{-10} \text{ J} = 2069 \text{ MeV}$

**3.11.16. Probl. 3.16 – Energia e velocidade de electrões**

No cinescópio (CRT) de um televisor a cor os electrões do feixe são acelerados por meio de uma diferença de potencial de 25 kV. Calcule:

- A energia cinética dos electrões, em joule.
- A velocidade dos electrões ao incidir no ecrã.
- Compare a velocidade obtida com a que seria obtida pela expressão clássica.

*RESOLUÇÃO:*

$$a) E_c = 25000 \text{ eV} = 25 \times 10^3 \times 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} = 4,005 \times 10^{-15} \text{ J}$$

$$b) E_c = (\gamma - 1)mc^2 \rightarrow \gamma = 1 + E_c / mc^2 \quad \gamma = 1 + \frac{4,005 \times 10^{-15}}{9,109 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2} = 1,0489$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{1,0489^2}} = 0,3016 \rightarrow v = 0,904 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$c) \text{ Expressão clássica: } E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \times 4,005 \times 10^{-15}}{9,109 \times 10^{-31}}} \text{ m/s} = 0,938 \times 10^8 \text{ m/s}$$

**3.11.17. Probl. 3.17 – Conversão massa-energia, 1**

Combinando 1,00 g de hidrogénio com 8,00 g de oxigénio obtêm-se 9,00 g de água. Durante esta reacção química é libertada a energia de  $2,86 \times 10^5 \text{ J}$ .

- Que massa dos constituintes iniciais se perdeu?
- A massa perdida consegue ser detectada por uma balança de precisão?

*RESOLUÇÃO:*

a) Energia total,  $E = \gamma mc^2$ . Como os constituintes se encontram em repouso,  $v = 0 \rightarrow \gamma = 1$ .

(A energia cinética é nula, a energia total é igual à energia em repouso).

$$m = \frac{E_R}{c^2} = \frac{2,86 \times 10^5}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg} = 3,177 \times 10^{-12} \text{ kg}$$

- Não há balanças, mesmo de precisão, que possam detectar este valor.

### 3.11.18. Probl. 3.18 – Conversão massa-energia, 2

O Sol liberta uma potência de  $3,77 \times 10^{26}$  W.

- Que massa é que em cada dia é convertida em energia, e que fracção é da sua massa?
- Ao fim de quanto tempo, devido a este fenómeno, é que o Sol terá a sua massa reduzida a metade da actual?
- Sabendo que o Sol se encontra a 8,0 minutos luz da Terra, calcule a potência que aqui é recebida por metro quadrado de superfície, suposta perpendicular à direcção de radiação.

**RESOLUÇÃO:**

- a) Energia radiada por dia:  $E = Pt = 3,77 \times 10^{26} \times 24 \times 3600 \text{ J} = 3,2573 \times 10^{31} \text{ J}$

Esta energia é obtida numa reacção nuclear a partir da massa do Sol:  $E = m c^2$

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{3,2573 \times 10^{31}}{(3 \times 10^8)^2} \text{ kg} = 3,619 \times 10^{14} \text{ kg} = 3,619 \times 10^{11} \text{ T}$$

Fracção da massa,  $\varepsilon_m = 3,619 \times 10^{11} / 1,991 \times 10^{30} \times 100 \% = 1,818 \times 10^{-17} \% \text{ por dia.}$

- b) Supondo que a massa cai exponencialmente será  $m = m_0 e^{-\alpha t} \rightarrow \frac{dm}{dt} = -\alpha m \rightarrow$

$$\rightarrow \alpha = \frac{3,6192 \times 10^{14}}{1,991 \times 10^{30}} \text{ dia}^{-1} \rightarrow \alpha = 1,8178 \times 10^{-16} \text{ dia}^{-1}.$$

A massa fica reduzida a metade ao fim de um tempo tal que  $\frac{m}{m_0} = e^{-\alpha t} = 0,5 \rightarrow$

$$t = \frac{\ln(0,5)}{-\alpha}$$

$$\rightarrow t = \frac{-0,6931}{-1,8178 \times 10^{-16}} \text{ dias} = 3,8131 \times 10^{15} \text{ dias} = 1,0447 \times 10^{13} \text{ anos} = 10,447 \text{ biliões}$$

de anos

- c) A área de uma esfera com o raio de 8 minutos-luz é dada por

$$S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times (8 \times 60 \times 3 \times 10^8)^2 \text{ m}^2 = 2,6022 \times 10^{23} \text{ m}^2. \text{ A potência radiada por}$$

$$\text{unidade de área será } P = \frac{3,77 \times 10^{26}}{2,6022 \times 10^{23}} \text{ W/m}^2 = 1,45 \text{ kW/m}^2. \text{ (em fotometria esta}$$

grandeza designa-se por irradiância e o seu símbolo é a letra  $E$ ).

**3.11.19. Probl. 3.19 – Energia cinética e tempo próprio**

Os raios cósmicos de alta energia são prótons com energia cinética aproximadamente de  $10^{13}$  MeV.

- a) Quanto tempo, no referencial próprio, demora um destes prótons a atravessar a via láctea, sabendo que esta tem o diâmetro aproximado de  $10^5$  anos-luz?  
 b) No referencial deste próton qual o diâmetro da via láctea, em quilómetros?

*RESOLUÇÃO:*

- a) Conversão da energia cinética do próton para joule:  $E_c = 10^{13} \times 10^6 \times 1,6022 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,6022 \text{ J}$

Cálculo de gama a partir da energia cinética:  $E_c = (\gamma - 1)mc^2 \rightarrow \gamma = 1 + E_c / (m_p c^2)$   
 $\rightarrow \gamma = 1 + 1,6022 / [1,673 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2] = 1,0658 \times 10^{10}$

Determinação da velocidade do próton:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \rightarrow v = c \times \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \rightarrow$

$$v = 3 \times 10^8 \times \sqrt{1 - \frac{1}{(1,0658 \times 10^{10})^2}} = 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Tempo que o próton demora a atravessar a galáxia, no referencial desta, em segundos:

$$t = 1 \times 10^5 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s} = 3,1536 \times 10^{12} \text{ s}$$

Tempo para atravessar a galáxia, no referencial do próton:  $t_p = \frac{t}{\gamma} = \frac{3,1536 \times 10^{12}}{1,0658 \times 10^{10}} \text{ s} =$

$$296 \text{ s} \approx 5 \text{ min}$$

- b) Comprimento da galáxia, em quilómetros:  $L_p = t \times c \times 10^{-3} \text{ km} = 9,4543 \times 10^{13} \text{ km}$

Comprimento da galáxia, em quilómetros, visto do referencial do próton:

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = \frac{9,4543 \times 10^{13}}{1,0658 \times 10^{10}} \text{ km} = 8,87 \times 10^7 \text{ km} \text{ (88 milhões de quilómetros)}$$

### 3.11.20. Probl. 3.20 – Velocidade e massa-energia

Uma nave espacial com a massa  $m = 1800 \text{ kg}$  é acelerada até à velocidade  $v = 0,892 c$ .

- Qual a energia necessária para levar a nave até àquela velocidade?
- Que quantidade de matéria seria necessária para produzir aquela energia?

*RESOLUÇÃO:*

a) A energia cinética relativista é expressa por:  $E_c = (\gamma - 1)mc^2$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,892)^2}} = 2,2122 \rightarrow E_c = (2,2122 - 1) \times 1800 \times (3 \times 10^8)^2 \text{ J} \\ = 1,9611 \times 10^{20} \text{ J}$$

b) A quantidade de matéria necessária para produzir esta energia obtém-se pela relação

$$E_c = mc^2 \rightarrow$$

$$m_e = \frac{E_c}{c^2} = \frac{1,9611 \times 10^{20}}{(3 \times 10^8)^2} = 2182 \text{ kg}$$

### 3.11.21. Probl. 3.21 – Conversão massa-energia

Numa central nuclear as barras de “combustível” são utilizadas durante 3 anos até serem substituídas. Se uma central com a potência térmica de 1,00 GW funcionar durante esses 3 anos a 80 % da sua capacidade:

Qual a diminuição de massa das barras de combustível?

*RESOLUÇÃO:*

O problema resolve-se utilizando a relação massa-energia,  $E = mc^2$ .

Cálculo da energia que a central tem de produzir durante o tempo indicado:

$$\text{Tempo de utilização (em segundos), } t_s = 1,00 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s} = 94608000 \text{ s.}$$

$$E_t = P \times t_s \times (\text{percentagem de utilização}) = 1,00 \times 10^9 \times 94608000 \times 0,80 \text{ J} = 7,5686 \times 10^{16} \text{ J.}$$

Diminuição de massa das barras de combustível:

$$m = \frac{E_t}{c^2} = \frac{7,5686 \times 10^{16}}{(3 \times 10^8)^2} = 0,842 \text{ kg}$$

**3.11.22. Probl. 3.22 – Massa-energia e momento linear**

Os raios- $\gamma$  ao penetrarem em núcleos atômicos pesados podem originar um par de partículas positrão+electrão, de acordo com a equação  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ .

- Determine a energia mínima dos raios- $\gamma$  necessária para se produzir este fenómeno.
- Qual o momento linear destes raios- $\gamma$  (fotões) e qual o comprimento de onda associado?

*RESOLUÇÃO:*

- Trata-se de um problema de conversão de energia em massa. Este raio- $\gamma$  (energia), dá origem a duas partículas materiais (electrão + positrão).

Massa do electrão:  $m_{e^-} = 9,1094 \times 10^{-31}$  kg.

Massa do positrão:  $m_{e^+} = 9,1094 \times 10^{-31}$  kg (igual à do electrão).

Massa produzida na “colisão”:  $m = m_{e^-} + m_{e^+} = 18,2188 \times 10^{-31}$  kg.

Energia necessária para produzir esta quantidade de matéria (massa):  $E = mc^2 \rightarrow$

$$E = 18,2188 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2 = 1,6397 \times 10^{-13} \text{ J} = \frac{1,6397 \times 10^{-13}}{1,6022 \times 10^{-19}} \text{ ev} = 102,3 \text{ Mev}$$

- O momento linear de um fotão é dado por  $p = \frac{E}{c} \rightarrow$

$$p = \frac{1,6397 \times 10^{-13}}{3 \times 10^8} \text{ Ns} = 5,47 \times 10^{-20} \text{ Ns}$$

Uma vez que o fotão possui a quantidade de energia  $E = hf$  (física quântica), e que se

tem  $\lambda f = c$ , obtém-se  $E = \frac{hc}{\lambda}$ , ou então,  $\lambda = \frac{hc}{E} \rightarrow$

$$\lambda = \frac{6,6261 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,6397 \times 10^{-13}} \text{ m} = 1,212 \times 10^{-13} \text{ m}$$

### 3.11.23. Probl. 3.23 – Energia e comprimento

No acelerador linear de Stanford um feixe de electrões é acelerado ao longo de um percurso de 3,00 km, até atingir uma energia de 20,0 GeV.

- Que velocidade atingem estes electrões?
- No referencial dos electrões qual o comprimento do acelerador?

*RESOLUÇÃO:*

a) Conversão da e. cinética do electrão para joule:  $E_c = 20 \times 10^9 \times 1,6022 \times 10^{-19} \text{ J} = 3,2044 \times 10^{-9} \text{ J}$

Cálculo de gama a partir da energia cinética:  $E_c = (\gamma - 1)mc^2 \rightarrow \gamma = 1 + E_c / (m_p c^2)$   
 $\rightarrow \gamma = 1 + 3,2044 \times 10^{-9} / [9,109 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2] = 3,914 \times 10^4$ .

Determinação da velocidade do electrão:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \rightarrow v = c \times \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \rightarrow$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{(3,914 \times 10^4)^2}} \times c = 2,999\,999\,999\,673\,62 \text{ c}$$

- b) No referencial dos electrões o comprimento do acelerador é  $L = L_p / \lambda = 3000 / 3,914 \times 10^4 \text{ m} = 7,66 \text{ cm}$

**3.11.24. Probl. 3.24 – Força e aceleração**

Uma partícula de massa  $m$ , e carga  $q$  positiva, inicialmente em repouso, é sujeita à acção de um campo eléctrico  $\mathbf{E}$  uniforme e constante, pelo que adquire uma aceleração  $\mathbf{a}$ .

- a) Prove que o valor da aceleração é dado por  $a = \frac{du}{dt} = \frac{qE}{m} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$
- b) Discuta o significado da dependência da aceleração em relação à velocidade.
- c) Se no instante  $t = 0$  a partícula se encontrar na posição  $x = 0$ , qual a expressão da sua velocidade ao fim de um tempo  $t$ ?
- d) Trace o diagrama espaço-tempo da partícula, supondo apenas uma dimensão espacial, o eixo dos  $xx$ , com o sentido do campo eléctrico.

(sugestão para a alínea a): parta do teorema do momento linear)

RESOLUÇÃO:

a) Teorema do momento linear  $\rightarrow \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ . Momento linear  $\rightarrow \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

A força aplicada é dada por  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

Tratando-se de um movimento a uma dimensão pode considerar-se só os módulos.

Derive-se  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left[ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} u \right] = m \left[ -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2u}{c^2}\right) \frac{du}{dt} u + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dt} \right] = \\ &= m \left[ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{u^2}{c^2}\right) \frac{du}{dt} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dt} \right] = m \left[ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{u^2}{c^2}\right) \frac{du}{dt} + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{du}{dt} \right] \\ &= m \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{u^2}{c^2} + 1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \frac{du}{dt} = m \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{dp}{dt}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\frac{dp}{dt}$  por  $F$ , que tem o valor  $qE$ , e notando que  $\frac{du}{dt} = a$ , resulta

$$a = \frac{qE}{m} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

- b) Se  $u \ll c$  obtém-se a expressão clássica, em que a aceleração é proporcional à força aplicada.

Se  $u \rightarrow c$  então  $a \rightarrow 0$ . Com velocidades da ordem de  $c$  o corpo, para uma força aplicada constante o corpo adquire uma aceleração cada vez mais pequena. No caso limite em que  $v = c$  o corpo não aumenta de velocidade. Tudo se passa como se a massa do corpo aumentasse com a velocidade.

- c) Para determinar a velocidade basta integrar a expressão da aceleração:

$$u = \int_0^t a(\tau) d\tau = \frac{qE}{m} \int_0^u \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} du . \text{ Para evitar integrais note-se que}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} u \right] = \frac{qE}{m}, \rightarrow$$

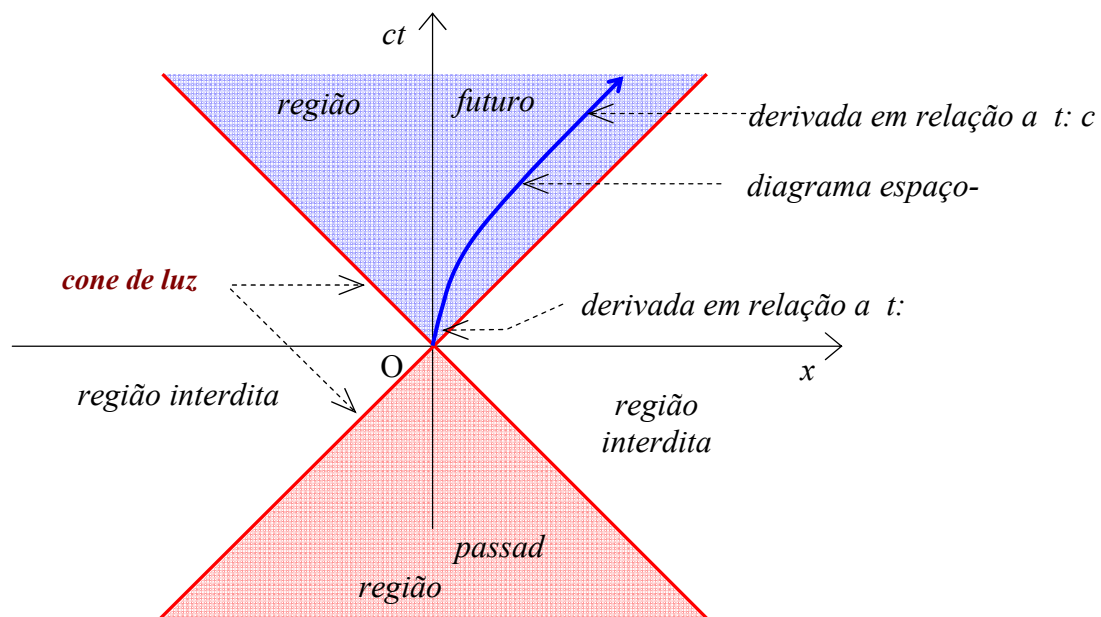
$$\text{ou seja, } d \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{qE}{m} dt . \text{ Integrando entre 0 e } t \text{ obtém-se } \frac{u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{qE}{m} t .$$

$$\text{Resolvendo em ordem a } u \text{ obtém-se } u^2 = \frac{q^2 E^2 t^2}{m^2 \left(1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m^2 c^2}\right)} . \text{ Para valores de } t \text{ pequenos}$$

$$\text{vem } u = \frac{qE}{m} t .$$

Quando  $t \rightarrow \infty$   $u \rightarrow c$

d) Diagrama espaço-tempo:



### 3.11.25. Probl. 3.25 – Efeito de Döppler, 1

O espectro de emissão da luz proveniente de uma galáxia é contínuo, porque estas são constituídas por milhões de estrelas em movimento (embora cada espectro individual seja discreto). No entanto os átomos de cálcio ionizados, em repouso no referencial da galáxia, originam uma forte absorção no comprimento de onda de 394 nm. Para uma galáxia na constelação da Hidra, a 2 mil milhões de anos-luz da Terra, a referida risca de absorção localiza-se em 475 nm.

Calcule a velocidade com que a galáxia se afasta da Terra.

*RESOLUÇÃO:*

O problema resolve-se com o auxílio da expressão do efeito de Döppler:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Substituindo valores numéricos vem

$$\frac{475 - 394}{394} + 1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \rightarrow \frac{c-v}{c+v} = 1,20558^2 \rightarrow v = 0,1848 c$$

### 3.11.26. Probl. 3.26 – Efeito de Döppler, 2

Efeito de Döppler longitudinal

- a) Prove que a variação de comprimento de onda da luz, por efeito de Döppler, é dada por

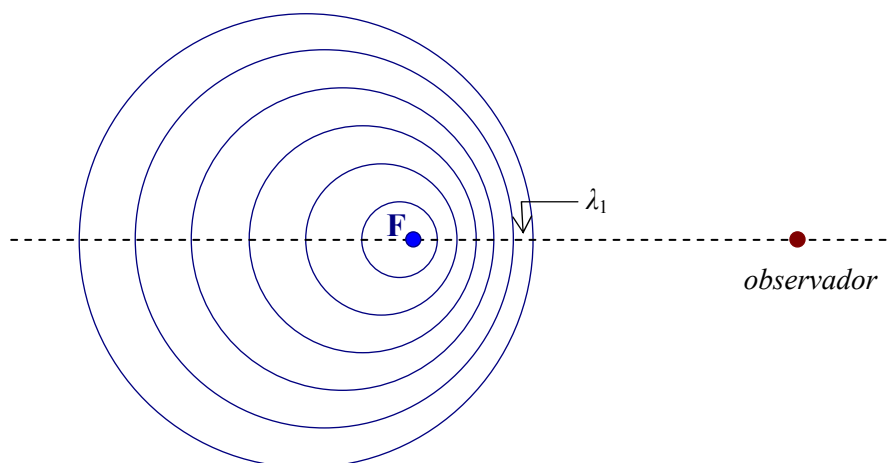
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} - 1$$

em que  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz da fonte e  $v$  a velocidade de aproximação entre a fonte e o observador.

- b) A que velocidade é que um automobilista deverá conduzir em direcção a um semáforo para que a luz vermelha lhe pareça verde? (considere  $\lambda_{\text{verde}} = 550 \text{ nm}$  e  $\lambda_{\text{vermelho}} = 650 \text{ nm}$ )

RESOLUÇÃO:

- a)



Imagine-se a fonte  $F$  a emitir periodicamente impulsos luminosos. Estes propagam-se segundo uma esfera. Se a fonte estiver em repouso (não representado na figura) estas esferas são concêntricas. Cada esfera corresponde a um impulso de luz emitido pela fonte. A esfera interior, junto a  $F$ , representa o impulso que foi emitido há muito pouco tempo, a esfera de raio maior representa o impulso emitido há mais tempo. Admitindo que a fonte emite uma radiação contínua sinusoidal, as esferas representarão, por exemplo, as cristas das ondas. Elas estão espaçadas de um comprimento de onda  $\lambda$ .

Suponha-se agora que a fonte se move em relação ao observador, com velocidade  $v$  (figura acima). Este recebe de forma mais rápida as ondas que vêm no seu sentido, e de forma mais lenta as que se afastam. O observador mede um comprimento de onda  $\lambda_1$  inferior a  $\lambda$ . Como  $\lambda = cT$ , durante o período  $T$  o observador aproxima-se  $vT$ , pelo que  $\lambda_1 = cT - vT = (c - v)T = \frac{c - v}{c} \lambda$ .

No entanto, devido à velocidade relativa ser uma fracção apreciável de  $c$ , é preciso entrar com a correcção relativista da contracção do espaço. O comprimento de onda

no referencial da galáxia, será  $\lambda' = \lambda_1 \times \gamma$ , pelo que  $\lambda' = \frac{c-v}{c} \lambda / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow$

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2} / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

b) Utilizando a expressão anterior fica

$$\frac{650-550}{550} + 1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \rightarrow \frac{c-v}{c+v} = 1,1818^2 \rightarrow v = 0,1655c$$

(Matlab: Cap3p26.m)

### 3.11.27. Probl. 3.27 – Raio gravitacional

Imagine que o Sol colapsa numa esfera de raio  $R_g$  tal que o trabalho necessário para de retirar da sua superfície uma partícula material de massa  $m$  é igual à sua energia em repouso  $E_R = mc^2$ . Este valor do raio tem o nome de raio gravitacional.

Calcule o valor de  $R_g$ .

RESOLUÇÃO:

A massa  $m$  está sujeita à força gravitacional  $\mathbf{F} = -\frac{Gm}{r^2} \mathbf{r}_1$  em que  $\mathbf{r}_1$  é o vector unitário

dirigido do centro de  $R_g$  para a partícula. Admita-se que se vai tirar a massa  $m$  da superfície da esfera de raio  $R_g$  e transportá-la até ao infinito. Para tal é necessário um valor de energia igual a

$$W = \int_{\infty}^{R_g} -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_g}^{\infty} \frac{GM_S m}{r^2} dr = \left[ \frac{GM_S m}{r} \right]_{R_g}^{\infty} = \frac{GM_S m}{R_g}$$

Pelo enunciado esta energia tem o valor  $W = E_R = mc^2$ .

Igualando as duas expressões vem

$$\frac{GM_S m}{R_g} = mc^2 \rightarrow R_g = \frac{GM_S}{c^2}$$

Aplicação numérica:  $R_g = \frac{6,672 \times 10^{-11} \times 1,991 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2} \text{ m} = 1,476 \times 10^3 \text{ m}$  ( $R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$ )

### 3.11.28. Probl. 3.28 – Equivalência entre E e B

Uma carga eléctrica  $+q$  move-se à velocidade  $\mathbf{v}$ , num referencial S em que existe um campo eléctrico  $\mathbf{E}$  e um campo magnético  $\mathbf{B}$ .

- Mostre que o campo eléctrico no referencial da carga,  $\mathbf{E}'$ , se relaciona com os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  pela expressão  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .
- Supondo que  $\mathbf{v}$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ , qual deverá ser a velocidade da carga eléctrica para que se tenha:  $E = 1 \text{ kV/m}$ ,  $E' = 99 \text{ kV/m}$  e  $B = 0,001 \text{ T}$ ?

*RESOLUÇÃO:*

- A carga em movimento no referencial S fica sujeita a uma força electromagnética dada por  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . No referencial da carga, S', esta fica apenas sujeita à força  $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$ , uma vez que a sua velocidade neste referencial é nula. Para que nos dois referenciais a carga fique sujeita ao mesmo valor da força deverá ser  $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ , pelo que  $q\mathbf{E}' = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .
- Neste caso, em que  $\mathbf{v}$  é perpendicular a  $\mathbf{B}$ , será  $E' = E + v \cdot B$ , donde  $v = (E' - E) / B$ .

Substituindo valores numéricos vem  $v = (99 \times 10^3 - 10^3) / 0,001 = 9,8 \times 10^7 \text{ m/s} \rightarrow$   
 $v = 0,327c$ .

## 4. INTRODUÇÃO À FÍSICA QUÂNTICA

Até aos finais do sec. XIX os fenómenos físicos podiam ser explicados pelo ramo do conhecimento a que hoje chamamos Física Clássica. Os físicos dessa altura estavam convictos que o edifício da Física se encontrava completamente construído, que já tinha chegado ao fim. Mas entretanto começaram a aparecer alguns fenómenos cuja explicação não era dada de forma satisfatória pelas leis da Física então conhecidas, como por exemplo a radiação do corpo negro, o efeito fotoeléctrico, o espectro de riscas dos gases, etc. Houve assim necessidade de pôr em causa os conceitos clássicos e partir para novas explicações, que abriram novos horizontes à Física. Muitas delas foram bastante controversas, e mesmo físicos de renome não estiveram de acordo. A dar força à controversa surgiu também uma nova teoria, a teoria da relatividade, que também punha em causa as ideias da Física Clássica. E os factos experimentais foram mais fortes do que todas as discussões e é sobre eles que assenta o ramo da Física, que lida fundamentalmente com partículas de dimensões inferiores às do átomo: a Física Quântica. Para a sua construção contribuíram muitos nomes célebres, como Wien, Planck, Einstein, Bohr, Broglie, Davison, G. Thomson, Heisenberg, Born, Dirac, Schrödinger, Compton, Pauli e muitos outros.

Far-se-á, neste capítulo, uma breve abordagem sobre alguns dos factos que levaram à construção da Física Quântica. Como será de esperar este tema é muito vasto e, contra-riamente ao que se suponha acontecer com a Física Clássica dos finais do sec. XIX, os conhecimentos sobre este tema cada vez mais se encontram longe de estar esgotados.

### 4.1. Radiação do Corpo Negro

#### 4.1.1. Corpo negro

É bem conhecido o facto de que os corpos, quando aquecidos a uma temperatura suficientemente elevada, se tornam incandescentes, emitindo energia luminosa e infravermelha. Mesmo à temperatura ambiente os corpos radiam energia em quantidade apreciável, mas esta não se torna visível porque o seu comprimento de onda cai dentro da gama dos infravermelhos. Chama-se *radiação* à energia emitida por um corpo, quer seja electromagnética ou corpuscular.

Os corpos emitem energia por reflexão e também devido à agitação molecular associada à sua energia interna, que é tanto maior quanto maior a sua temperatura. Admita-se que sobre o corpo não está a incidir nenhuma energia. Chama-se *poder emissivo* de um corpo ou emissividade,  $e$ , à temperatura  $T$ , à quantidade de energia radiante emitida por esse corpo, por unidade de tempo por unidade de superfície e no intervalo de frequências  $(f, f+df)$ .

Os corpos também absorvem a energia luminosa e infravermelha que sobre eles incide, e de um modo geral, a energia electromagnética, reflectindo outra parte.

Chama-se **poder absorvente** de um corpo,  $a$ , à temperatura  $T$ , à quantidade de energia radiante absorvida por esse corpo, por unidade de tempo, por unidade de superfície e no intervalo de frequências  $(f, f+df)$ .

Chama-se **corpo negro** àquele que absorve toda a energia que sobre ele incide, não reflectindo nenhuma fracção desta. O corpo negro é uma abstracção teórica. Na prática todos os corpos reflectem alguma da energia que sobre eles incide, podendo no entanto essa reflexão ser quase nula para determinados corpos.

As afirmações que se acabam de fazer partem do princípio que se trata apenas de emissões de origem térmica.

Uma lei, do ano de 1859, devida a Kirchoff<sup>25</sup>, afirma que a relação entre o poder emissivo e o poder absorvente de qualquer corpo é independente da natureza do corpo, dependendo apenas da frequência da radiação e da temperatura do corpo. Tem-se assim

$$\frac{e}{a} = I(f, T) \quad (4.1)$$

Uma vez que a expressão anterior se aplica a qualquer corpo, também se aplicará ao corpo negro, para o qual  $a = 1$ . Pode então afirmar-se que

***A razão entre o poder emissivo e o poder absorvente de qualquer corpo é igual ao poder emissivo do corpo negro, à mesma temperatura, e para as mesmas frequências.***

Este facto mostra a importância do conhecimento da estrutura de  $I(f, T)$ .

É corrente no estudo da radiação do corpo negro utilizar comprimentos de onda em vez de frequências, pelo que será considerada a função  $I(\lambda, T)$ , em vez de  $I(f, T)$ .

#### 4.1.2. Lei de Stefan

A primeira lei conhecida sobre a função  $I$ , foi estabelecida de forma empírica em 1879, por Stefan<sup>26</sup>. Nela não é considerada a distribuição espectral em frequência e afirma que

$$I(T) = \sigma eAT^4 \quad (4.2)$$

em que

$\sigma$  - constante de Stefan,  $\sigma = 5,6696 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

$e$  - emissividade da superfície radiante,

$A$  - área da superfície do corpo a radiar,

$T$  - temperatura absoluta da mesma superfície.

O valor de  $I$  aqui apresentado é o valor integral de  $I(\lambda, T)$  para todos os comprimentos de onda.

---

<sup>25</sup> Gustav Robert Kirchoff, físico alemão, 1824-1887.

<sup>26</sup> Joseph Stefan, físico e matemático austro-esloveno, 1835-1893.

### 4.1.3. Lei Rayleigh-Jeans

Esta lei, baseada na teoria clássica (anterior a 1900), explica a radiação electromagnética de um corpo como tendo origem em cargas eléctricas aceleradas, pertencentes aos átomos, e próximas da superfície. A lei de Rayleigh<sup>27</sup>-Jeans tem como expressão

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} \quad (4.3)$$

e representa a distribuição espectral de energia por unidade de área de emissão;  $I(\lambda, T)d\lambda$  será assim a energia emitida por unidade de área, no intervalo de comprimentos de onda  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ . Nesta expressão os parâmetros têm o seguinte significado:

- $\lambda$  – comprimento de onda da radiação,
- $T$  – temperatura absoluta da superfície do corpo radiante,
- $c$  – velocidade de propagação da luz no vazio,
- $k_B$  – constante de Boltzmann.

A expressão (4.3) não começou a não satisfazer, quando se começaram a estudar comprimentos de onda pequenos. Além de não estar de acordo com os dados experimentais, conduz a valores de energia muito elevados, a tender para infinito quando  $\lambda$  se aproxima de zero. É a chamada *catástrofe do ultra-violeta*.

### 4.1.4. Lei do deslocamento de Wien

A experiência mostrava que a distribuição de  $I(\lambda, T)$  tinha o andamento indicado na Fig. 4-1. A justificação teórica foi dada por Planck. Todas as curvas apresentam um máximo. Existe uma relação bem definida entre o valor do comprimento de onda para o qual ocorre o máximo e a respectiva temperatura; é a chamada lei do deslocamento de Wien<sup>28</sup>:

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ mK} \quad (4.4)$$

### 4.1.5. Lei de radiação de Planck

Para resolver a questão da falta de concordância entre as observações experimentais e a justificação teórica, em 1900 Planck<sup>(29)</sup> propõe a seguinte expressão para a radiação do corpo negro

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)} \quad (4.5)$$

Nesta expressão o parâmetro  $h$  foi ajustado experimentalmente de modo a adaptar a fórmula aos resultados experimentais. Verificou-se mais tarde que este parâmetro viria a coincidir com a famosa constante de Planck! A expressão anterior encontra-se representada, em escala logarítmica, na Fig. 4-1.

<sup>27</sup> John William Strutt, Lord Rayleigh, 1842-1919. Nobel de Física em 1904 pelas pesquisas sobre a densidade dos gases mais importantes e pela descoberta do árgon.

<sup>28</sup> Wilhelm Wien, físico alemão, 1864-1928. Nobel da Física em 1911 por trabalhos sobre a radiação térmica.

<sup>29</sup> Max Planck, físico alemão, 1858-1947.

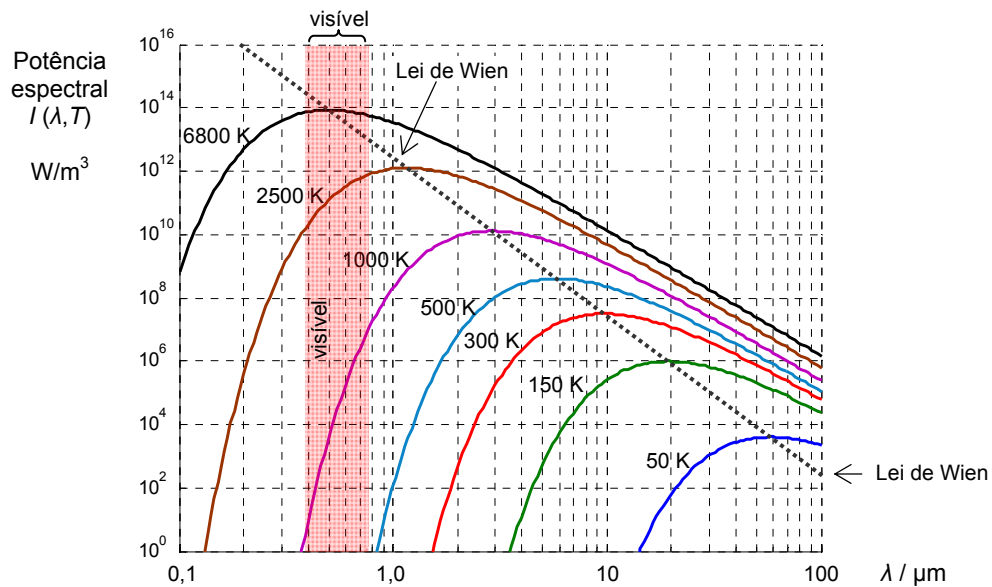


Fig. 4-1 – Emissão de energia por um corpo negro

A teoria de Planck baseia-se nas hipóteses seguintes:

1. As moléculas apenas podem ter estados de energia discretos,  $E_n$ , dados por

$$E_n = nhf \quad (4.6)$$

$n$  – inteiro positivo, chamado número quântico,

$h$  – constante de Planck,

$f$  – frequência da radiação.

2. As moléculas absorvem ou emitem energia sob a forma de grupos de unidades discretas (mais tarde designadas por fótons). A energia de um fóton é dada por

$$E = hf \quad (4.7)$$

## 4.2. Efeito Fotoelétrico

O efeito fotoelétrico é o processo pelo qual os electrões são libertados da superfície de um metal, por acção da luz ou de outra radiação electromagnética que sobre ela incide. Considere-se uma superfície metálica constituída por um metal alcalino (cátodo), colocada no vácuo e faça-se incidir sobre ela um feixe de luz visível monocromática, de pequeno comprimento de onda, na região dos UV (Fig. 4-2). Constata-se que a superfície fica imediatamente electrizada com cargas positivas. Isto acontece porque o metal liberta electrões.

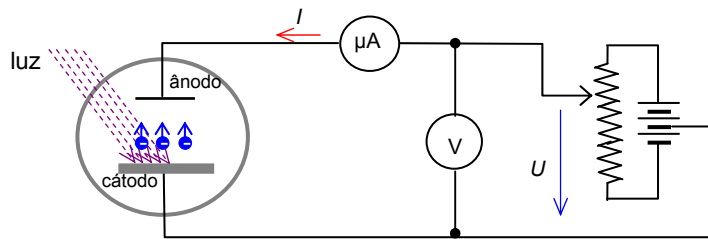


Fig. 4-2 – Dispositivo para a emissão de fotoelectrões

Os electrões libertados, designados por fotoelectrões, podem ser recolhidos por meio de um ânodo, como se indica na figura.

Para diversos valores do fluxo luminoso  $\phi$  incidente sobre o cátodo, se se variar a tensão entre o cátodo e o ânodo a corrente fotoelétrica  $I$  tem o andamento indicado na Fig. 4-3: para tensões positivas é praticamente independente de  $U$ , quando a tensão desce e é negativa, inferior a um valor  $U_s$ , a corrente anula-se, independentemente da intensidade do fluxo luminoso. Uma vez que a energia cinética de um electrão acelerado pela diferença de potencial  $U$  é dada por  $eU$ , dos gráficos da figura conclui-se que apenas os electrões com energia cinética superior a  $eU$  conseguem alcançar o ânodo.

À tensão  $U_s$ , necessária para anular o fluxo electrónico (corrente  $I$ ), dá-se o nome de potencial de paragem.

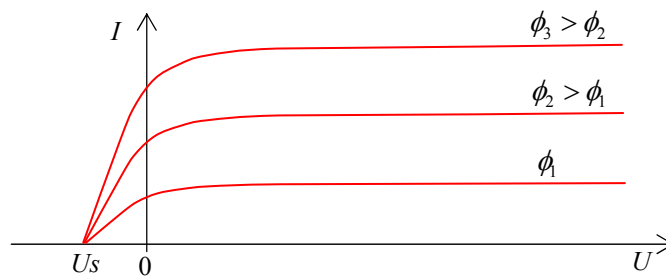


Fig. 4-3 – Corrente fotoelétrica em função da tensão aplicada

Experimentalmente verifica-se ainda que:

1. Não há emissão de electrões se a frequência da luz for inferior a um determinado valor  $f_c$ ,
2. A energia cinética máxima dos fotoelectrões é proporcional à frequência da luz incidente,
3. A energia cinética máxima dos fotoelectrões libertados é independente da intensidade de energia incidente,
4. Os fotoelectrões são emitidos quase instantaneamente após a incidência da luz sobre a superfície ( $t < 10^{-9} s$ ).

A explicação do efeito fotoelétrico foi dada por Einstein<sup>30</sup> em 1905 (ano em que publicou a Teoria da Relatividade Restrita). Mais tarde, num seu artigo sobre a radiação electromagnética, Einstein estende o conceito de energia quantificada, de Planck, às ondas electromagnéticas. Ele afirma que a luz ou qualquer onda electromagnética é constituída por uma **corrente de fotões**. A energia associada a cada fotão é dada por

$$E = hf \quad (4.8)$$

em que  $f$  é a frequência da onda electromagnética e  $h$  a constante de Planck.

O fotão tem a sua energia toda localizada num ponto e ao colidir com um electrão do metal transfere toda a sua energia para este. Uma vez que o electrão se encontra ligado ao metal do cátodo, com uma **energia de ligação**  $E_L$ , a energia cinética máxima dos electrões libertados será dada por

$$E_{cm} = hf - E_L \quad (4.9)$$

O valor de  $E_L$  é dependente do material que constitui a superfície do cátodo e também tem o nome de **energia de saída**.

A expressão (4.9) explica porque é que é necessário que a frequência da luz seja superior a um determinado valor  $f_c$  para que se possa verificar corrente fotoelétrica: deverá ser  $hf - E_L > 0$ ,

ou seja 
$$f > f_c = \frac{E_L}{h} \quad (4.10)$$

Uma vez que  $\lambda f = c$ , pode definir-se comprimento de onda de corte por

$$\lambda_c = \frac{hc}{E_L} \quad (4.11)$$

Para que se verifique o efeito fotoelétrico o comprimento de onda da luz incidente sobre o cátodo deverá ser inferior ao comprimento de onda de corte.

A expressão (4.9) tem a representação gráfica da Fig. 4-4 e justifica todas as observações experimentais efectuadas que se mencionaram atrás, com excepção do

---

<sup>30</sup> Albert Einstein, físico alemão, 1879–1955. Prémio Nobel da Física em 1921 pela explicação do efeito fotoelétrico.

tempo de emissão dos fotoelectrões, que para a sua medição necessita de equipamento relativamente elaborado.

Na tabela 4.1 indicam-se os valores de algumas energias de ligação. Estes valores, bem como muitos outros, já eram conhecidos pelos Químicos no final do sec XIX.

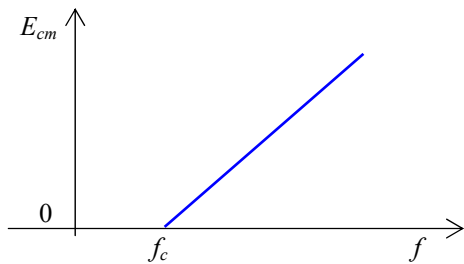


Fig. 4-4 – Energia dos fotoelectrões em função da frequência da luz incidente

Tabela 4-1  
Algumas energias de ligação

<i>metal</i>	$E_L$ (eV)
alumínio	4,08
cobre	4,70
ferro	4,50
platina	6,35
prata	4,73
sódio	2,46
zinco	4,31

### 4.3. Espectros dos gases

No final do sec. XIX observou-se que os gases rarefeitos contidos num tubo de vidro, quando submetidos a uma descarga eléctrica emitiam luz visível. A análise do espectro desta luz mostrou que ele é constituído por riscas, contrariamente ao que acontece com o espectro emitido por um sólido incandescente, que é contínuo. Na Fig. 4-5 encontram-se representados os espectros de emissão de alguns gases, bem como o espectro solar e um espectro contínuo de luz branca.

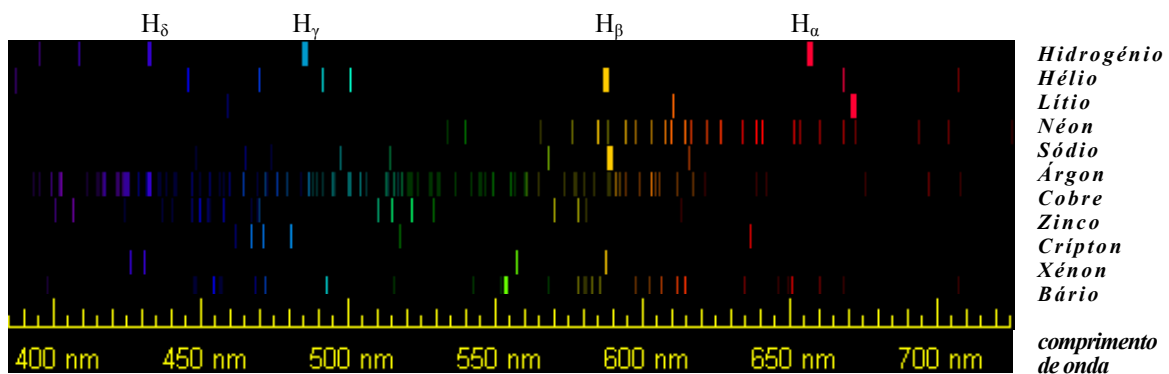


Fig. 4-5 – Espectro de emissão de alguns gases

Notas:

1. A descarga num gás rarefeito produz-se submetendo-o a uma diferença de potencial superior á sua tensão de disrupção.

2. Quando o elemento é sólido à PTN, está a observar-se a descarga num vapor desse elemento, a uma temperatura muito superior à ambiente.

3. O aparelho que permite observar as riscas espectrais chama-se espectroscópio.

Um outro tipo de espectro que ocorre com frequência é designado por espectro de absorção. É produzido por um feixe de luz branca ao atravessar um gás rarefeito. Apresenta-se como um espectro contínuo com algumas riscas escuras, que de um modo geral são as mesmas que a do espectro de emissão do mesmo gás.

Na Fig. 4-6 mostra-se em a) o espectro da luz branca (contínuo) e em b) o espectro da luz solar. Este último apresenta algumas linhas escuras; correspondem aos elementos que se encontram nas atmosferas solar e da Terra e produzem a absorção da luz de espectro contínuo emitida pelo Sol. Em c) mostra-se o espectro do gás mais abundante na atmosfera solar: Hélio.

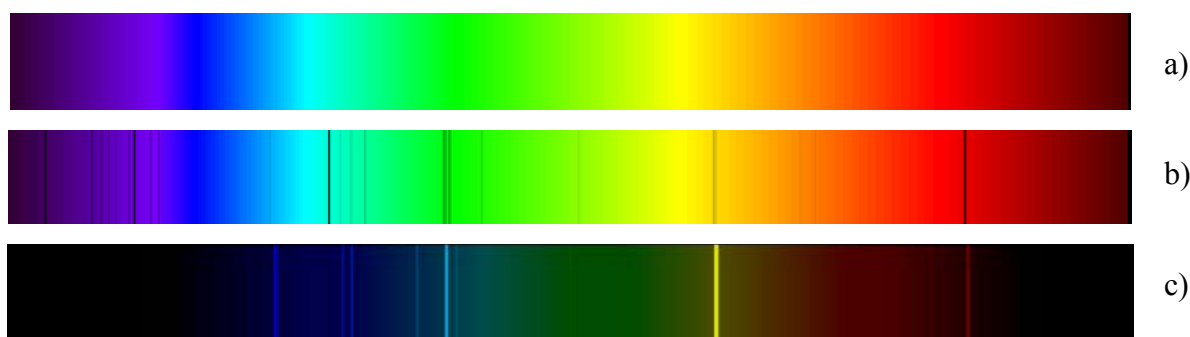


Fig. 4-6 – Espectro da luz branca e espectro da luz solar

Os espectros dos gases são todos diferentes uns dos outros. Por esta razão são utilizados para identificar a sua presença. O espectro do hélio foi observado antes da descoberta deste gás na Terra, foi a análise espectral que revelou a sua existência na atmosfera solar. Têm-se efectuado análises espectrais da luz do Sol e de outras estrelas e nunca se conseguiu encontrar elementos que não existam na Terra.

O espectro mais simples que se conhece é o do átomo de hidrogénio. Por esse motivo foi estudado exaustivamente desde cedo, desde os anos de 1860. Uma vez que as linhas do espectro situadas na região do visível eram as mais fáceis de observar, foi por aí que se começou. Balmer<sup>31</sup>, em 1885 estabeleceu uma expressão empírica que relacionava as 4 linhas visíveis do espectro de hidrogénio, que ele designou por H<sub>α</sub> (vermelha, 653,3 nm), H<sub>β</sub> (verde, 486,1 nm), H<sub>γ</sub> (azul, 434,1 nm) e H<sub>δ</sub> (violeta, 364,5 nm). Estas linhas estão assinaladas no topo da Fig. 4-5 e referem-se ao espectro que se encontra em 1º lugar, o do hidrogénio. A expressão obtida foi

(fórmula de Balmer) 
$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.12)$$

em que

<sup>31</sup> Johann Jakob Balmer, físico e matemático suíço, 1825-1898.

$\lambda$  – comprimento de onda da riscas,

$R_H$  – uma nova constante, que designou por constante de Rydberg,  $R_H = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ,

$n$  – número inteiro maior que 2:  $n = 3, 4, 5, \dots$

Entretanto constatou-se que havia muito mais riscas provenientes do átomo de hidrogênio, mas que caíam fora da região visível, ou seja, nas regiões dos infravermelhos e dos ultravioletas. Nem todas estas linhas espectrais podiam ser interpretadas pela fórmula de Balmer. Em 1888, Rydberg<sup>32</sup> apresenta uma fórmula mais genérica,

$$\text{(fórmula de Rydberg)} \quad \frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.13)$$

onde  $n_1$  é um número inteiro  $n_1 = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  e as riscas ocorrem para  $n$  inteiro,  $n > n_1$ . Consoante os valores de  $n_1$  assim as séries têm nomes particulares:

$n_1$	$n_2$	nome da série	converge para	região do espectro
1	2 a $\infty$	s. de Lyman	91 nm	ultravioleta
2	3 a $\infty$	s. de Balmer	365 nm	visível
3	4 a $\infty$	s. de Paschen	821 nm	infravermelha
4	5 a $\infty$	s. de Brackett	1459 nm	infravermelha
5	6 a $\infty$	s. de Pfund	2280 nm	infravermelha

A fórmula de Rydberg pode ser usada para outros elementos que não sejam o hidrogênio, tomando o aspecto

$$\frac{1}{\lambda} = R_H Z^2 \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (4.14)$$

em que  $Z$  representa o número atômico do elemento.

A expressão (4.13) apenas pode ser justificada teoricamente com a introdução do átomo de Bohr, em que aparecem os conceitos de estados de energia discretos, quantum de energia, transições entre estados de energia, etc., conceitos que estão na base da Física Quântica.

#### 4.4. Efeito de Compton

O efeito de Compton consiste na difusão de um feixe de raios-X pela matéria.

Compton<sup>33</sup> e a sua equipa estudaram este fenómeno já antes de 1924, tendo concluído o seguinte:

- O feixe de raios-X é desviado ao colidir com electrões em repouso,
- A frequência dos raios-X desviados é inferior à dos incidentes,
- Para cada ângulo de difusão há apenas raios-X de uma só frequência,

<sup>32</sup> Johannes Rydberg, físico sueco, 1854-1919.

<sup>33</sup> Arthur Holly Compton, físico Americano, 1892-1962. Nobel da Física em 1927 pelos trabalhos de difusão de raios-X pela matéria.

- Os electrões adquirem velocidade, segundo um ângulo diferente do dos raios-X incidente.

O fenómeno não conseguia ser explicado pela teoria clássica, considerando os raios-X como sendo apenas uma radiação do tipo ondulatório. Se assim fosse, os electrões inicialmente em repouso absorveriam energia da onda incidente (raios-X) e iniciariam uma trajetória rectilínea e acelerada com a direcção e sentido do feixe que sobre eles incidia e radiando energia devido ao facto de se encontrarem acelerados. Mas tal não acontecia.

Para explicar as observações, Compton admitiu que os raios-X se comportavam não como ondas, mas como partículas pontuais, cada uma das quais possuía energia, dada por  $E = hf = hc / \lambda$ , e momento linear  $p = E / c = h / \lambda$ . Admitiu ainda que ao dar-se a colisão entre cada uma destas partículas e os electrões havia conservação do momento linear. Admitiu também que a colisão se fazia com conservação de energia. As partículas de luz (e os raios-X) são designadas por fótões.

Compton efectuou os ensaios fazendo incidir um feixe de raios-X monocromático sobre um alvo de grafite. Para diversos ângulos de difusão dos raios-X mediu a sua distribuição de intensidade  $I(\lambda)$ , com o auxílio de um espectrómetro constituído por um cristal de calcite rotativo e de um detector de gás ionizado em modo de contador proporcional (corrente de saída proporcional à radiação incidente). Compton fez os ensaios para os ângulos de difusão de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $135^\circ$ .

Para deduzir a expressão analítica a que Compton chegou [ver expressão (4.26)], considere-se o fenómeno da difusão dos raios-X, representado pelo gráfico da Fig. 4-7 que contém as hipóteses de Compton:

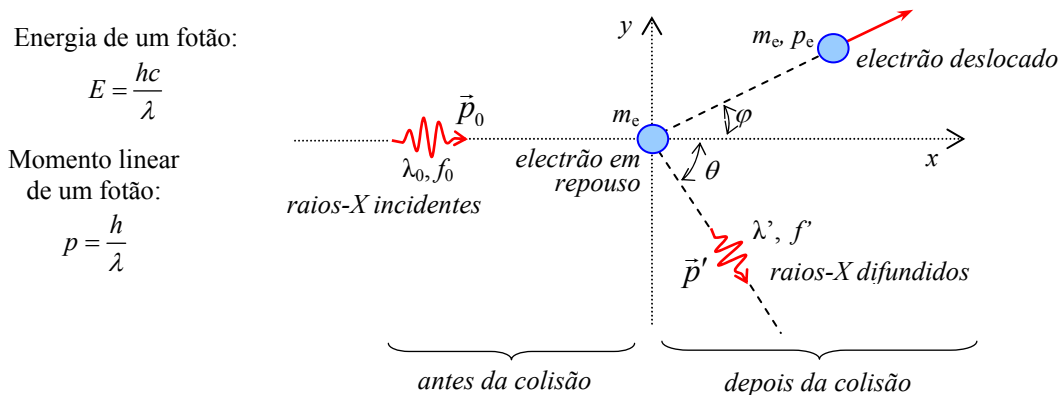


Fig. 4-7 – Efeito de Compton, segundo a teoria quântica

Os raios-X incidentes, de frequência  $f_0$  e comprimento de onda  $\lambda_0$ , são caracterizados pelo seu momento linear  $\vec{p}_0$  e pela sua energia  $E_0$ . Depois do choque com os electrões são difundidos segundo um ângulo  $\theta$ ; possuem agora frequência  $f'$  e comprimento de onda  $\lambda'$ . Os electrões, de massa  $m_e$ , encontram-se em repouso antes da colisão, adquirindo uma velocidade  $v_e$ .

A conservação do momento linear, durante a colisão, permite escrever

$$\begin{aligned} \text{componente em } x \rightarrow & \left\{ \begin{aligned} \frac{h}{\lambda_0} &= \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + \gamma m_e v_e \cos \varphi \end{aligned} \right. \quad (4.15) \\ \text{componente em } y \rightarrow & \left\{ \begin{aligned} 0 &= -\frac{h}{\lambda'} \sin \theta + \gamma m_e v_e \sin \varphi \end{aligned} \right. \quad (4.16) \end{aligned}$$

A conservação da energia, permite escrever<sup>34</sup>

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda'} + (\gamma - 1)m_e c^2 \quad (4.17)$$

Vai-se procurar eliminar  $\varphi$  e  $v_e$  nas equações anteriores (e eliminar também  $\gamma$ , que é função de  $v_e$ ). Para o efeito reescrevam-se as equações (4.15) e (4.16), isolando no 2º membro os termos em  $\varphi$ , e em cada equação resultante elevem-se ambos os membros ao quadrado. Transforme-se também a equação (4.17). Resulta

$$\left( \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta \right)^2 = (\gamma m_e v_e \cos \varphi)^2 \quad (4.18)$$

$$\text{e} \quad \left( \frac{h}{\lambda'} \sin \theta \right)^2 = (\gamma m_e v_e \sin \varphi)^2 \quad (4.19)$$

$$\text{e ainda} \quad \left( \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda'} + m_e c \right)^2 = (\gamma m_e c)^2 \quad (4.20)$$

Somando (4.18) e (4.19), desenvolvendo os parêntesis e simplificando, e desenvolvendo (4.20) vem

$$\frac{h^2}{\lambda_0^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2 \frac{h^2}{\lambda_0 \lambda'} \cos \theta = \gamma^2 m_e^2 v_e^2 \quad (4.21)$$

$$\frac{h^2}{\lambda_0^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} + m_e^2 c^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda_0 \lambda'} + 2 \frac{h}{\lambda_0} m_e c - 2 \frac{h}{\lambda'} m_e c = \gamma^2 m_e^2 c^2 \quad (4.22)$$

Subtraindo membro a membro (4.21) de (4.22) e substituindo  $\gamma$  pelo seu valor

$$-2 \frac{h^2}{\lambda_0 \lambda'} (1 - \cos \theta) + m_e^2 c^2 - 2 h m_e c \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda' \lambda_0} = \frac{m_e^2}{1 - \frac{v_e^2}{c^2}} (c^2 - v_e^2) \quad (4.23)$$

$$\text{donde,} \quad \lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (4.24)$$

A grandeza  $h/m_e c$  é constante e designa-se por comprimento de onda de Compton:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0,00243 \text{ nm} \quad (4.25)$$

<sup>34</sup> Devido às velocidades elevadas dos electrões deslocados é necessário utilizar a expressão relativista para a energia cinética,  $E_c = (\gamma - 1)m_e c^2$ , em que  $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$

e finalmente  $\lambda' - \lambda_0 = \lambda_C(1 - \cos \theta)$  (4.26)

Esta expressão, obtida experimentalmente por Compton, e a sua justificação considerando os raios-X como sendo fótons, constituíram o passo que finalmente convenceu os últimos resistentes às ideias quânticas.

## 4.5. O átomo de hidrogénio

A hipótese da matéria ser constituída por átomos é quase tão antiga quanto a própria civilização. No entanto, até começar a haver investigação científica, essa hipótese não passava de uma corrente filosófica. Foi durante o sec. XIX, com o estudo de vários fenómenos químicos, dos raios catódicos e do movimento browniano que a hipótese atómica começou a ser consequência das observações experimentais. Começou a ser claro para os cientistas que a matéria era constituída por átomos e que estes continham cargas eléctricas positivas e negativas.

O modo como estes átomos eram constituídos é que constituiu um quebra-cabeças, tendo evoluído ao longo dos tempos. Um dos modelos que vigorou durante algum tempo, o modelo de Thomson<sup>35</sup>, considerava as cargas eléctricas positivas com distribuição contínua em todo o átomo e as cargas negativas discretas distribuídas pelo seu interior (como se o átomo fosse uma melancia, a polpa vermelha as cargas positivas e as pevides as cargas negativas).

O modelo de Thomson foi posto em causa com a célebre experiência de Rutherford: bombardeou-se uma folha de ouro muito fina com partículas  $\alpha$  e concluiu-se que as partículas eram difundidas segundo ângulos muito diversos, inclusivamente para trás. Rutherford interpretou os resultados deste modo: as cargas eléctricas positivas existentes no átomo estão distribuídas pontualmente. Com o auxílio da Mecânica Clássica conseguiu calcular a probabilidade das partículas  $\alpha$  serem difundidas segundo um determinado ângulo. Rutherford estabeleceu ainda que as cargas negativas (electrões) deveriam orbitar em torno das cargas positivas (a massa associada às cargas negativas era muito inferior à das positivas) para que não fossem atraídas umas pelas outras.

No modelo de Rutherford subsistia um “pequeno” problema: o electrão ao rodar numa órbita circular radiaria energia (já se sabia que uma carga eléctrica acelerada radia energia). Ao perder energia a órbita teria um raio cada vez menor e o electrão acabaria por colapsar sobre a carga positiva do núcleo em torno da qual orbitava. Foi para resolver este problema que interveio Bohr<sup>36</sup>, que postulou o seguinte:

1. Os electrões movem-se em torno do núcleo, em órbitas circulares,
2. Apenas algumas órbitas são estáveis; nelas os electrões não radiam energia,
3. As órbitas estáveis são caracterizadas por níveis discretos de energia  $E_n$ , bem definidos,
4. Sempre que um electrão transita de uma órbita para outra muda o seu nível de energia havendo emissão de energia se  $E_i > E_f$ , ou absorção se  $E_i < E_f$ ; (os índices  $i$  e  $f$  significam inicial e final). A energia emitida ou absorvida é sempre múltipla de  $hf$ .
5. As órbitas estáveis são aquelas em que momento angular do electrão é múltiplo de  $h/2\pi$ .

Tomando como válidos estes pressupostos podem calcular-se os raios das órbitas e os seus estados de energia. Bohr recorreu à Física Clássica (não tinha outra!).

<sup>35</sup> Joseph John Thomson, físico britânico, 1856-1940. Nobel da Física pela descoberta do electrão.

<sup>36</sup> Niels Henrik David Bohr, físico dinamarquês, 1885-1962. Nobel da Física em 1922.

Para a estabilidade de uma órbita circular é necessário que a força de atracção entre as cargas (dada pela lei de Coulomb) seja igual em módulo à força de inércia devido à rotação:

$$k_e \frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (4.27)$$

Nesta expressão a carga eléctrica do núcleo é  $Ze$ , em que  $Z$  representa o número atómico.

Considere-se o átomo mais simples, o **átomo de hidrogénio**: para ele  $Z = 1$ ; é constituído por um núcleo (protão – partícula de massa  $m_p$  e carga eléctrica  $+e$ ) e por um electrão (partícula de massa  $m_e$  e carga  $-e$ ).

A condição 5 de cima, imposta por Bohr, escreve-se

$$r m_e v = n \hbar, \text{ com } n \in \mathbb{Z}^+ \quad (4.28)$$

Em que o símbolo  $\hbar$  é utilizado para representar a quantidade  $h/2\pi$ . Substituindo o valor de  $v$  de (4.28) em (4.27) obtém-se para os raios das órbitas ( $Z=1$  para o hidrogénio)

$$r_n = \frac{\hbar^2}{k_e m_e e^2} n^2 \quad (4.29)$$

Em que se afectou  $r$  de um índice  $n$  para explicitar o facto de as órbitas serem discretas. A equação (4.29) pode escrever-se ainda

$$r_n = a_0 n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

em que

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{k_e m_e e^2} = 0,0529 \text{ nm} \quad (4.31)$$

A grandeza  $a_0$  é designada por raio de Bohr. Corresponde ao raio da órbita mais pequena que é possível obter. Este valor deu uma ideia da ordem de grandeza do tamanho do átomo mais simples. Compare-se o seu valor com o comprimento de onda da luz (verde): é cerca de 10 000 vezes mais pequeno. Na Fig. 4-8 representam-se a órbita correspondente ao número quântico  $n=1$  e parte das órbitas referentes aos números quânticos  $n=2$ ,  $n=3$  e  $n=4$ . A representação está feita aproximadamente à escala. Estão também indicados os valores dos raios das mesmas órbitas e os valores da energia dos electrões associados às órbitas (ver cálculo a seguir).

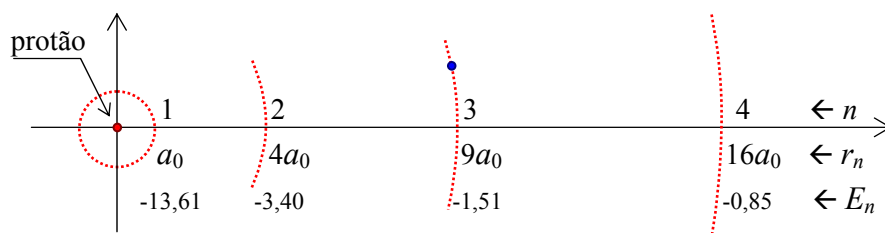


Fig. 4-8 – Diâmetros das 4 primeiras órbitas do átomo de hidrogénio

As energias cinética e potencial do electrão são dadas respectivamente por

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \text{e} \quad E_p = -k_e \frac{e^2}{r} \quad (4.32)$$

Considerando que a energia total  $E$  é igual a  $E_c + E_p$ , e substituindo em  $E_c$  o valor de  $v$  obtido de (4.28), vem para a energia total do electrão

$$E = -\frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{r} \quad (4.33)$$

Ou ainda, considerando que  $r = r_n = a_0 n^2$ :

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2} \quad (4.34)$$

Veja-se agora qual a energia emitida por um átomo de hidrogénio quando um electrão transita de uma órbita de energia  $E_i$  para outra mais interior  $E_f$  (estado de energia final mais baixo). De acordo com a hipótese 4 de Bohr emitirá um fóton de energia igual a  $hf = E_i - E_f$ . Representando por  $n_i$  e  $n_f$  os valores do número quântico inicial e final vem

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h n_f^2} - \frac{k_e e^2}{2a_0 h n_i^2} \quad (4.35)$$

A expressão (4.35) pode ser escrita em termos de comprimentos de onda, em vez de frequência:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (4.36)$$

com

$$R_H = \frac{k_e e^2}{2a_0 h c} \quad (4.37)$$

Comparando a expressão (4.36) com a expressão empírica (4.13) conclui-se que Bohr conseguiu explicar a emissão espectral do átomo de Hidrogénio. A constante de Rydberg passou a ser calculada. O seu valor diferia do valor obtido experimentalmente, a menos de 1 %, pelo que o trabalho de Bohr constituiu o estabelecimento definitivo da Física Quântica.

Bohr estendeu imediatamente os seus trabalhos a outros átomos e iões com um só electrão orbitando em torno de um núcleo de número atómico  $Z$ , tendo também provado a relação (4.14).

As séries de riscas emitidas pelo átomo de hidrogénio depois de excitado podem assim sem interpretadas como transições entre estados de energia no átomo, como se mostra na Fig. 4-9.

O nível de energia mais baixo corresponde a  $n=1$ , e é designado por **estado fundamental**, em inglês “ground state”. Tem o valor de -13,606 eV. O nível de energia correspondente a  $n=\infty$  tem o valor zero e corresponde a não haver ligação entre o núcleo e o electrão.

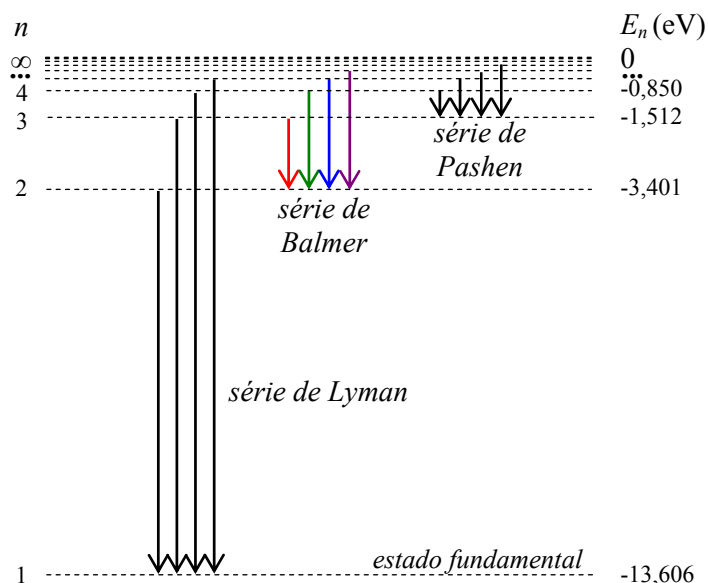


Fig. 4-9 – Espectro de emissão do átomo de hidrogénio

As equações da Teoria da Relatividade degeneram nas leis da Física Clássica quando as velocidades em causa são substancialmente inferiores à velocidade da luz. Em Física Quântica existe algo semelhante, não relacionado com velocidades mas sim com números quânticos. É o chamado **princípio da correspondência** de Bohr que afirma o seguinte: As leis da Física Quântica estão de acordo com as leis da Física Clássica sempre que a diferença entre os níveis de energia associadas aos números quânticos tende para zero. Isto acontece com  $n$  elevados.

Uma observação mais detalhada das linhas espectrais de emissão dos gases mostra que muitas destas são constituídas por várias linhas próximas. O estudo do átomo de hidrogénio não se poderia pois resumir ao que se acaba de expor, mas ao que resumidamente se expõe a seguir.

O estudo teórico do átomo de hidrogénio faz-se actualmente obtendo as soluções da equação de Schrödinger (ver secção 4.8). Assim, além do número quântico  $n$ , designado por **número quântico principal**, foi introduzido um **número quântico orbital**  $\ell$ , que para cada valor de  $n$  pode tomar os valores 0, 1, 2, ...,  $n-1$ . Este número quântico faz uma quantificação adicional do módulo do momento angular do electrão, que apenas pode tomar os valores  $L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar$ . Foi ainda introduzido um 3º número quântico  $m_\ell$ , chamado **número quântico orbital magnético**, que permite quantificar a componente do momento angular segundo a direcção do eixo dos  $zz$ . Para cada valor de  $\ell$  deverá ser  $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$ .

Os estados com o mesmo número quântico têm o nome de **camadas** e são identificados pelas letras K, L, M, ..., para os valores de  $n$  igual a 1, 2, 3, ..., respectivamente.

Os estados que, para um determinado  $n$ , têm o mesmo valor de  $\ell$  são designados por sub-camadas. São identificados pelas letras s, p, d, f, ..., para os valores de  $\ell$  igual a 0, 1, 2, 3, ..., respectivamente.

Chamam-se **orbitais** aos estados quânticos de um átomo, caracterizados pelos números quânticos  $n$ ,  $\ell$  e  $m_\ell$ .

Na tabela seguinte faz-se um resumo do que acaba de se dizer.

#### NÚMEROS QUÂNTICOS DE UM ÁTOMO

<i>letra usada</i>	<i>nome</i>	<i>valores possíveis</i>	<i>nº. de valores</i>
$n$	número quântico principal	1, 2, 3, 4, 5, 6, ... K, L, M, N, O, P, ...	qualquer (até infinito)
$\ell$	número quântico orbital	0, 1, 2, 3, 4, 5, $n-1$ . <i>s, p, d, f, g, h, ...</i> .	$n$
$m_\ell$	nº. quântico orbital magnético	$-\ell, -\ell+1, \dots, 0, \dots, \ell-1, \ell$ .	$2\ell+1$

O estado fundamental do átomo de hidrogénio é único, tem o valor  $n=1$ , a que corresponde  $\ell=0$  e  $m_\ell=0$ . É designado por  $1s$ .

Para a camada 2 deste mesmo átomo existem 2 **sub-camadas**, correspondentes a  $\ell=0$  e a  $\ell=1$ . Para a sub-camada  $\ell=0$  há apenas um valor de  $m$  enquanto para a camada  $\ell=1$  já há 3 valores para  $m_\ell$ . Então, para o número quântico  $n=1$  há no total 4 estados diferentes.

Posteriormente foi introduzido um 4º estado quântico, a que se chama spin, e é representado pela letra  $m_s$ . Este estado apenas pode tomar os valores  $+\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$ . Este número quântico é devido a propriedades relativistas do electrão. Assim o número de estados quânticos de um átomo é duplo do que acaba de se apresentar.

Em 1925 Pauli<sup>37</sup>, apresentou o princípio de exclusão. Segundo ele um electrão apenas poderá haver dois electrões em cada orbital, um com  $m_s = +\frac{1}{2}$  e outro com  $m_s = -\frac{1}{2}$ . Como consequência deste princípio o número de electrões que cada camada pode ocupar é também limitado: a camada K ( $n=1$ ) apenas pode conter 2 electrões, a camada L 8 electrões, a camada M 18 electrões, etc.

<sup>37</sup> Wolfgang Ernst Pauli, físico austro-americano, 1900, 1958. Nobel da Física em 1945 pelo princípio de exclusão.

## 4.6. Ondas de matéria

Uma vez que os fótons exibem tanto características de ondas como de partículas, Louis de Broglie<sup>38</sup> na sua tese de doutoramento apresentada em 1923, supondo que talvez o mesmo se passasse com a matéria, postula que esta também deverá exibir uma dualidade onda / partícula. A onda associada a uma partícula não será uma onda electromagnética, tem propriedades diferentes desta, sendo designada por onda de matéria. Note-se que contrariamente a outros fenómenos, em que a teoria surgiu como resultado de observações experimentais, para as ondas de matéria não havia até aquela data qualquer evidência experimental ou suspeita de que tais ondas pudessem existir. A evidência experimental surgiu alguns anos depois de a teoria ser apresentada.

Para atribuir um comprimento de onda a uma partícula material, Broglie tirou comparou com o que se passava com os fótons: se a estes está associada uma energia  $E = hf = hc/\lambda$ , e um momento linear dado por  $p = h/\lambda$ , onde intervém o comprimento de onda do fóton, que pode ser escrito como  $\lambda = p/c$ , será lógico generalizar a expressão anterior para a matéria e definir comprimento de onda de uma partícula material pela expressão

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma mv} \quad (4.38)$$

em que  $\gamma$  indica a utilização do momento linear relativista. Broglie postulou ainda que a frequência de uma partícula material deve estar relacionada com a sua energia total por

$$E = hf \quad (4.39)$$

Esta teoria, tal como proposta por Broglie, foi considerada pura especulação, não tendo sido imediatamente aceite. Em 1926, três anos depois da publicação da tese de Broglie, Davisson<sup>39</sup> e Germer<sup>40</sup>, dois cientistas que efectuavam experiências com a difusão de electrões de baixa velocidade (cerca de 50 eV de energia) por um alvo de níquel, no vazio, observaram durante uma experiência que os electrões produziam figuras de difracção.

A observação inicial do facto, por Davisson e Germer, aconteceu acidentalmente quando estes estudavam a difusão de electrões por um alvo de níquel; ao aquecerem o alvo, com intuito de remover uma camada oxidada que se formou após uma deficiência no sistema de vácuo, acabaram por cristalizá-lo. Por ser este cristal uma rede de átomos dispostos regularmente, ele foi “visto” pelos electrões como uma rede de difracção, onde as fendas eram os próprios espaçamentos interatómicos; sendo esse espaçamento da ordem de grandeza do comprimento de onda de Broglie associado ao electrão, da ordem de 0,1 nm, formaram-se figuras de difracção. Esta observação fez com que Davisson e Germer se voltassem para este facto; analisaram as direcções nas quais os electrões eram detectados; utilizando as relações de Bragg para interferência construtiva em redes tridimensionais que já eram usadas na difracção de raios-X em cristais, pude-

---

<sup>38</sup> Louis Victor de Broglie, físico francês, 1892–1987. Prémio Nobel da Física em 1929 pela apresentação da teoria ondulatória da matéria.

<sup>39</sup> Clinton Joseph Davisson, físico americano, 1881–1958. Prémio Nobel da Física em 1937 pela verificação experimental da difracção dos electrões por meio de uma rede cristalina.

<sup>40</sup> Lester Halbert Germer, físico americano, 1896–1971.

ram comprovar as relações de Broglie para os comprimentos de onda associados aos electrões, ficando assim, provado experimentalmente, que existiam ondas de matéria. O tema foi imediatamente abordado por outros investigadores, nomeadamente por Thomson<sup>41</sup>, que produziu figuras de difracção fazendo passar electrões através de lâminas delgadas de ouro e de mica.

Posteriormente a difracção de partículas materiais por redes cristalinas foi observada com núcleos de hélio (partículas  $\alpha$ ), átomos de hidrogénio, neutrões e muitas outras. Veja-se uma forma de interpretar o postulado de Bohr 5 da quantificação do momento angular da órbita do electrão.

Considerando a órbita circular (1), o seu perímetro é dado por  $2\pi r$  e o momento angular é dado por  $p = mv$ . A estabilidade da órbita (2) equivale a uma condição de estacionaridade, o que implica que em todo o seu perímetro haverá um múltiplo de comprimentos de onda, o seja  $2\pi r = n\lambda$ . Mas, de acordo com Broglie (4.38) é  $\lambda = h/p$ . Substituindo o valor de  $\lambda$  na equação do perímetro resulta  $2\pi r = nh/p$  e daqui resulta o postulado 5.

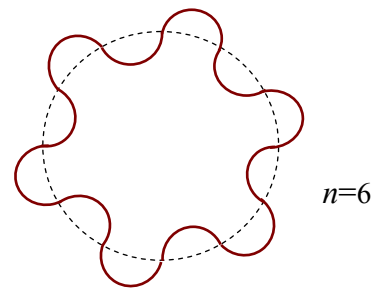


Fig. 4-10 – Interpretação da quantificação do momento angular de um electrão

#### 4.7. Princípio da incerteza

Na Física Clássica está implícito o facto de que qualquer grandeza que caracterize o estado de movimento de uma partícula pode ser medida com exactidão. Pode-se medir simultaneamente a posição e a velocidade de uma partícula com um grau de incerteza arbitrariamente pequenas, limitado apenas pela tecnologia dos sistemas de medida. O mesmo não se verifica em Mecânica Quântica: de acordo com o **princípio da incerteza**, apresentado por Heisenberg<sup>42</sup> em 1927, o produto das incertezas na determinação da posição e do momento linear de uma partícula deverá ser superior a um determinado valor dado por,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.40)$$

em que  $\hbar = h/2\pi$ , e  $h$  a constante de Planck. Como afirmou Heisenberg no seu trabalho,

*“The more precisely the position is determined, the less precisely the momentum is known in this instant, and vice versa”.*

Embora correntemente este facto seja conhecido como princípio, ele é hoje demonstrado rigorosamente, recorrendo ao formalismo da Mecânica Quântica. Há no entanto formas mais simples de estimar a ordem de grandeza do produto  $\Delta x \cdot \Delta p$ , recorrendo a conceitos de Mecânica Estatística ou então e Mecânica Ondulatória. Este último é análogo ao

<sup>41</sup> George Paget Thomson, físico britânico, 1892–1975. Prémio Nobel da Física em 1937, pela verificação experimental da difracção de electrões através de cristais. (Filho de J. J. Thomson).

<sup>42</sup> Werner Karl Heisenberg, físico alemão, 1901-1976. Nobel de Física, 1932, trabalhos em Mec. Quântica.

facto que conhecemos relativo à análise espectral de um sinal: quando um sinal está muito localizado no tempo o seu espectro de frequências é largo, e vice-versa. Considere-se um feixe de *electrões*, de momento linear  $p$ , a atravessar uma fenda de largura  $\Delta x$ . De acordo com o que se viu na secção anterior, este feixe, devido ao carácter ondulatório que lhe está associado, vai produzir uma figura de difracção quando projectado sobre um alvo.

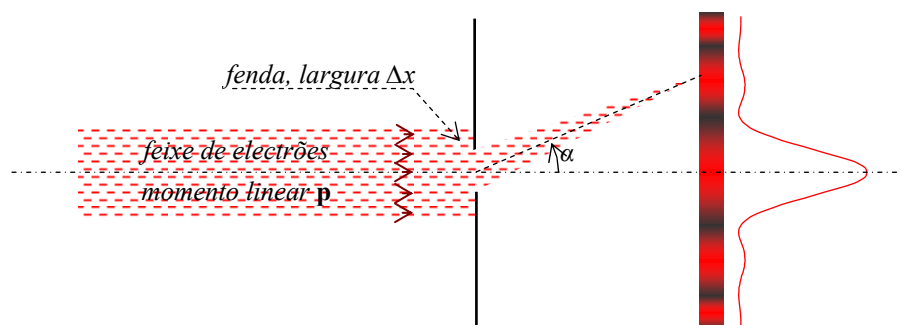


Fig. 4-11 – Difracção de um feixe de electrões, por uma fenda

A largura da fenda,  $\Delta x$ , está associada à incerteza na posição do electrão (na perpendicular à direcção do movimento): sabe-se que o electrão passou pela fenda, não se sabe exactamente por onde. A passagem do electrão pela fenda introduz-lhe um desvio, para cima ou para baixo, na perpendicular à direcção do movimento. O seu momento angular passa a ter uma componente de valor  $\Delta p$ , perpendicular à direcção inicial. (o valor total de  $\mathbf{p}$  mantém-se). Tem-se, aproximadamente,  $\Delta p = p \cdot \sin \alpha$ . Por outro lado a teoria ondulatória indica-nos que  $\lambda = \Delta x \cdot \sin \alpha$ . Combinando estas duas expressões e notando que o momento linear de um electrão é dado por  $p = h / \lambda$ , resulta finalmente  $\Delta x \cdot \Delta p = h$ .

Prova-se ainda que existe uma relação semelhante a (4.40), entre a incerteza na medida da energia de uma partícula e o intervalo de tempo necessário para a sua determinação:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4.41)$$

## 4.8. Função de onda

Na secção 4.6 associa-se a matéria a uma onda. A uma partícula material com momento linear  $p$  é associado um determinado comprimento de onda, dado pela expressão (4.38).

Analise-se o fenómeno através da experiência da dupla fenda, em que se faz incidir sobre as fendas (iguais entre si) um feixe de electrões, todos com a mesma energia. A largura das fendas é bastante inferior à distância entre elas e a distância ao alvo (onde se observa a projecção dos electrões) é substancialmente superior à distância entre as fendas. Ensaie-se os 3 casos:

- 1 – apenas se encontra aberta a fenda superior;
- 2 – apenas se encontra aberta a fenda inferior;
- 3 – encontram-se abertas as duas fendas.

No primeiro caso os electrões que atravessam a fenda vão projectar-se sobre o alvo, sendo a curva de distribuição dos impactos do tipo gaussiano, com o máximo na direcção fonte de electrões fenda (curva 1, a verde). Este resultado não deixa nenhum observador surpreendido, sendo facilmente interpretável segundo a teoria clássica do electrão, que o considera como partícula material.

No caso 2, tudo se passa de um modo semelhante ao anterior, a única diferença é que a distribuição dos impactos se encontra deslocada em relação à anterior, de uma distância praticamente igual à distância entre os orifícios (curva 2, a azul).

Supondo agora que durante a primeira metade do tempo do ensaio estava aberta apenas a fenda 1 e na 2ª metade apenas a fenda 2, a distribuição dos impactos será igual à curva 1+2 indicada a vermelho, sobreposição das curvas 1 e 2 mas com metade da amplitude.

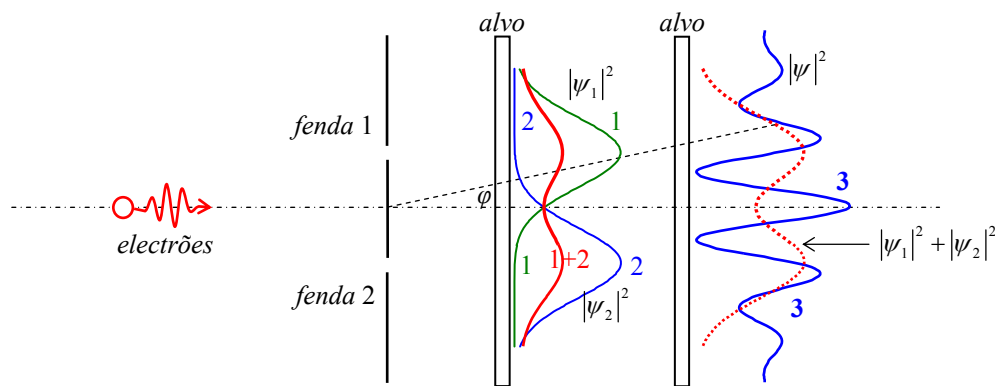


Fig. 4-12 – Passagem de um feixe de electrões, por fendas

Considere-se agora o caso 3, em que as duas fendas se encontram abertas ao mesmo tempo; seria de esperar obter uma distribuição de impactos sobre o alvo que fosse igual à sobreposição das curvas 1 e 2 (curva 1+2, a vermelho), pois os electrões ao passarem por uma das fendas não terão informação sobre a abertura da outra fenda. No entanto a experiência contradiz esta expectativa: verifica-se experimentalmente que a distribuição dos impactos tem a forma indicada pela curva 3, a azul carregado: nela aparece uma periodicidade espacial, indicação de que há interferências.

Façam-se passar os electrões um a um. Os resultados são semelhantes aos que se obtêm com um feixe; a única diferença é que é preciso esperar muito mais tempo para começar a poder observar as curvas de distribuição, integrando no tempo o efeito dos impactos sobre o alvo.

A pergunta que agora se faz é esta: como é que um electrão isolado, ao passar por uma fenda, pode interferir consigo próprio, ou seja, como é que ele “tem conhecimento”, ao passar por uma das fendas, que a outra fenda se encontra aberta ou fechada? Tudo se passa como se o electrão passasse pelas duas fendas simultaneamente.

A resposta a esta questão passa por atribuir ao electrão um *carácter ondulatório*. Como acontece para a luz, que revela a sua característica de onda em determinadas circunstâncias e a sua característica corpuscular noutras, assim acontece com o electrão.

Em Física Quântica associa-se ao electrão (e às outras partículas) uma função que dá conta das propriedades ondulatórias da partícula, que é designada por função de onda.

A **função de onda** é uma entidade complexa (no sentido matemático, com parte real e imaginária) que contém toda a informação acerca da partícula. Além disso o quadrado do seu módulo indica a probabilidade que a partícula tem de se encontrar num determinado ponto do espaço, num determinado instante. É habitual representar a função de onda pela letra grega  $\psi$ .

Em relação à experiência da Fig. 4-12, se for atribuída ao electrão do caso 1 (apenas a fenda superior aberta) a função de onda  $\psi_1$ , ao electrão do caso 2 a função de onda  $\psi_2$ , e ao electrão do caso 3 a função de onda  $\psi$ , diz-se que neste último caso o electrão se encontra num **estado de sobreposição** dado por

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (4.42)$$

A probabilidade de encontrar o electrão será, para estes 3 casos,  $|\psi_1|^2$ ,  $|\psi_2|^2$  e  $|\psi|^2$  respectivamente para os casos 1, 2 e 3. Uma vez que existe desfasagem entre estes estados, que justifica a interferência; podem representar-se as funções de onda como fasores num plano complexo:

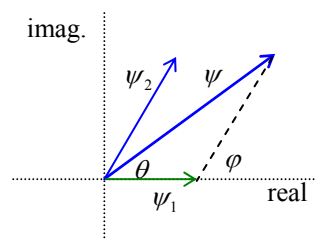


Fig. 4-13 – Adição de duas funções de onda

Do diagrama anterior pode obter-se

$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1| \cdot |\psi_2| \cdot \cos \varphi \quad (4.43)$$

Que é a representação da distribuição dos electrões no caso 3 (ver Fig. 4-12).

## 4.9. Equação de Schrödinger

Considere-se agora o movimento de uma partícula material, confinado a uma região. Para simplificar, considere-se um electrão que apenas se pode movimentar ao longo do eixo dos  $x$ , entre as coordenadas  $0$  e  $L$ . O espaço  $x < 0$  e  $x > L$  (por colocação de barreiras que delimitam a região  $0-L$ ). Procure-se determinar a função de onda associada a este electrão. Sabe-se o seguinte:

1. A probabilidade de encontrar a partícula fora do intervalo  $0-L$  é zero,
2. A probabilidade de encontrar a partícula dentro do intervalo  $0-L$  é um.

Isto significa que a função de onda deverá ser nula para  $x \leq 0$  e  $x \geq L$ .

Faça-se uma analogia com o que se passa com a vibração de uma corda metálica esticada, presa nos extremos ( $0$  e  $L$ ) e que está sujeita a vibrações. Sabe-se que a corda vibrante admite, neste caso, como modo de vibração ondas sinusoidais estacionárias, que podem ter diversos modos, caracterizados por um número  $n$  tal que

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad (4.44)$$

Considerando que o mesmo se pode passar com a função de onda, escreve-se para esta

$$\psi(x) = \psi_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.45)$$

A densidade de probabilidade de encontrar o electrão no posição  $x$  é dada por

$$|\psi|^2(x) = \psi_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.46)$$

e deverá ainda ser  $\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$ . Este integral representa a certeza de encontrar o electrão dentro do intervalo  $[0$  e  $L]$ , extremos incluídos. Na Fig. 4-14 representa-se em a) a função de onda (4.45) e em b) a densidade de probabilidade (4.46) para os 4 primeiros valores de  $n$ .

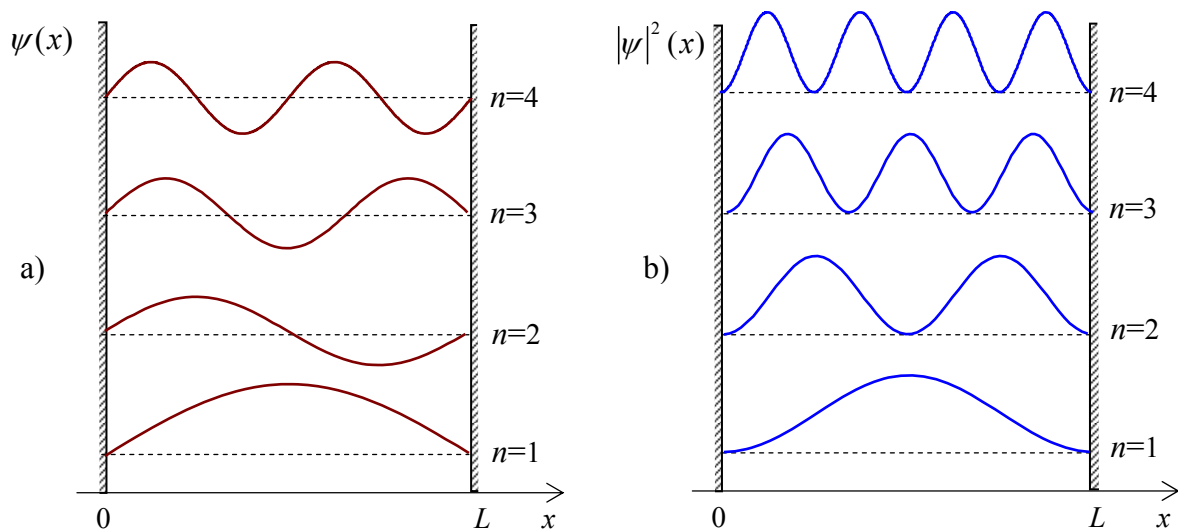


Fig. 4-14 – Função de onda de uma partícula confinada ao intervalo  $[0, L]$

O momento linear da partícula, dado por  $p = h / \lambda$ , uma vez que o comprimento de onda se encontra restrito a  $\lambda = 2L / n$ , apenas pode tomar os valores

$$p_n = \frac{nh}{2L} \quad (4.47)$$

Quanto à energia da partícula, dada por  $E = 1/2mv^2$ , como  $p = mv$  e está quantificado, toma também valores quantificados:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 = E_1 n^2, n=1, 2, 3, \dots \quad (4.48)$$

Repare-se que o valor mínimo que pode tomar a energia da partícula,  $E_1$ , é diferente de zero, contrariamente ao que acontece em Mecânica Clássica. De acordo com a Mecânica Quântica uma partícula material nunca se encontra em repouso.

Será agora interessante saber a que equação ou equações obedece a função de onda. Sabemos que quando se trata de fotões, ou dito de outro modo, de ondas electromagnéticas, estas seguem as equações de Maxwell e as equações de propagação de Laplace associadas. Mas como será com a função de onda de uma partícula?

O caso mais simples é o da partícula limitada a uma dimensão espacial  $x$ . Para estes casos a função de onda é uma função de variáveis separáveis, do tipo

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} \quad (4.49)$$

Em que a componente dependente do tempo obedece à **equação de Schrödinger**<sup>43</sup> independente do tempo

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E_T - U(x))\psi(x) \quad (4.50)$$

Nesta equação  $E_T$  representa a energia total da partícula e  $U(x)$  representa a energia potencial do sistema em que a partícula se encontra. A função  $\psi(x)$  deverá obedecer às seguintes condições:

- ser unívoca, isto é, a cada  $x$  corresponder apenas uma função  $\psi(x)$ ,
- ser contínua, e ter 1ª derivada contínua,
- anular-se para  $x = \pm\infty$ ,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ , isto é, a partícula deverá encontrar-se no eixo dos  $xx$ .

Seja agora o caso da função de onda de uma partícula não relativista, que se pode movimentar em todo o espaço,  $\Psi(r, t)$ . Como para o caso das equações de Maxwell, não é possível estabelecer a equação de Schrödinger de um modo puramente dedutivo. É necessário fazer algumas hipóteses, feitas com base nas observações experimentais:

---

<sup>43</sup> Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, físico austríaco, 1887–1961. Nobel de Física em 1933.

- A equação deverá ser linear, para que se possam construir grupos de ondas,
- O conhecimento de  $\Psi(r, t_0)$  deverá ser suficiente para determinar  $\Psi(r, t)$ , o que implica que a equação deve ser de 1ª ordem no tempo,
- Os resultados obtidos deverão coincidir com os da Mecânica Clássica, no domínio em que esta se aplica,
- Para o caso de uma partícula livre (não sujeita a campos externos), a sua função de onda deverá poder escrever-se como uma sobreposição de ondas sinusoidais, de frequência  $\omega = E / \hbar$  e número de ondas  $k = p / \hbar$ .

A partir destes pressupostos é possível obter a equação

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(r, t) \quad (4.51)$$

Esta equação degenera na equação clássica  $E = p^2 / 2m$  desde que se substituam os operadores  $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$  por  $E$  e  $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$  por  $p^2$ .

No caso da partícula não relativista (e sem spin) se encontrar sujeita a um campo de forças, derivado de um potencial  $U(r, t)$ , a equação de Schrödinger dependente do tempo toma a forma

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(r, t) + U(r, t) \Psi(r, t) \quad (4.52)$$

A integração da equação (4.52), que nem sempre é fácil, permite a obtenção da função de onda de uma partícula.

Vão agora analisar-se alguns casos simples, de partículas com movimento a uma dimensão.

#### 4.9.1. Partícula num poço de potencial

Chama-se por poço de potencial a uma distribuição de energia potencial nula no interior de uma região e constante (finita) no seu exterior. Seja o caso de um sistema a uma dimensão espacial, designada por  $x$ ; a energia potencial será nula no intervalo  $[0, L]$  e terá o valor constante  $U$  fora deste intervalo. Admita-se que o valor de  $U$  é superior ao valor da energia cinética da partícula. Se assim for, de acordo com a teoria clássica a partícula terá a sua posição sempre no interior do intervalo  $[0, L]$ . Como se verá, o mesmo não acontece se forem aplicados os conceitos da Física Quântica. Aplique-se a equação de Schrödinger (4.50) a esta partícula. A equação escreve-se de uma forma mais simples, fazendo  $C^2 = 2m(U - E) / \hbar^2$ :

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = C^2 \psi(x) \quad (4.53)$$

A solução desta equação tem a forma

$$\psi(x) = Ae^{Cx} + Be^{-Cx} \quad (4.54)$$

Uma vez que  $C^2 > 0$  fora do poço, nas regiões I e III indicadas na figura a solução deverá ser da forma exponencial; na região II tem-se  $C^2 < 0$ , pelo que  $C$  é imaginário, originando soluções sinusoidais. Para que a solução não se torne infinita deverá ser  $B=0$  na região I e  $A=0$  na região II.

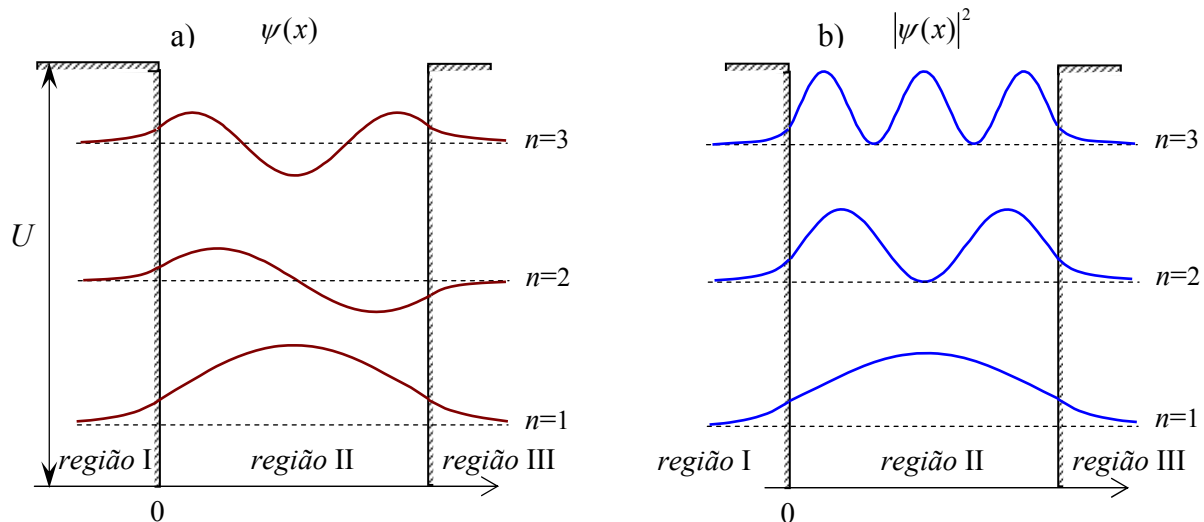


Fig. 4-15 – Partícula num poço de potencial a uma dimensão

A solução na região II é sinusoidal e deverá verificar-se continuidade de  $\psi(x)$  e da sua derivada em  $x=0$  e em  $x=L$ .

#### 4.9.2. Partícula numa barreira de potencial – efeito de túnel

Chama-se por barreira de potencial a uma distribuição de energia potencial em que esta algures tem uma descontinuidade finita positiva, durante um comprimento finito. Considere-se de novo o problema a uma dimensão. Designe-se por  $L$  a largura da barreira e por  $U$  a sua altura. Admita-se que  $U$  é constante em toda a extensão da barreira e superior ao máximo valor que possa ter a energia total da partícula.

A aplicação da equação da Schrödinger a esta partícula permite concluir que a função de onda é sinusoidal nas regiões I e I, e exponencial na região II. Uma partícula enviada da região I, com energia  $E$ , tem a possibilidade de penetrar pela barreira e passar para a região III. Há pois alguma probabilidade de encontrar a partícula na região III. Este resultado, confirmado experimentalmente e utilizado nos díodos de efeito de túnel, contraria as previsões da Física Clássica, segundo a qual uma partícula de energia  $E$  não tem possibilidade de atravessar uma barreira de energia  $U > E$ , pois seria enviada para trás.

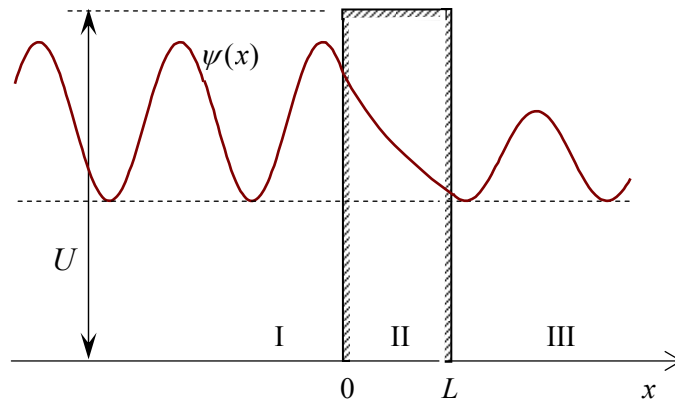


Fig. 4-16 – Partícula sujeita a uma barreira de potencial

#### 4.10. Princípios da Mecânica Quântica

Em Física Quântica, para descrever um sistema físico utiliza-se, como se viu, a função de onda. Uma das hipóteses fundamentais da Física Quântica é a de que o conhecimento completo da função de onda representa a informação máxima que é possível obter sobre esse sistema. Nenhuma experiência poderá fornecer mais informação do que aquela que é dada pela função de onda.

Viu-se também que o estado de um sistema (caracterizado por exemplo pela posição e pela velocidade) é apenas determinado a menos de uma determinada incerteza, e que a medição de uma determinada variável vai interferir no conhecimento que se tem de outras. Isto significa que não é possível medir a função de onda, mas apenas medir certas grandezas físicas, tais como o momento linear, o momento angular, a energia, etc. Dirac<sup>44</sup> designou estas grandezas por *observáveis*.

Em face do exposto pode compreender-se que a Física Quântica esteja construída a partir de princípios, que se passam a enumerar:

- P1 – A todo o sistema físico, com  $n$  graus de liberdade, corresponde uma função de onda  $\psi(q,t)$ , normada à unidade. Toda a informação possível sobre o sistema pode ser obtida desta função de onda.
- P2 – A toda a observável corresponde um operador linear e hermiteano no espaço de Hilbert<sup>45</sup>, dotado de uma base ortonormada completa de funções próprias.
- P3 – A evolução de um sistema físico no decorrer do tempo é definida pela equação

$$\psi(t) = U(t, t_0) \quad (4.55)$$

<sup>44</sup> Paul Adrien Maurice Dirac, engenheiro e matemático britânico, 1902 – 1984. Nobel de Física em 1933.

<sup>45</sup> David Hilbert, matemático alemão, 1862-1943.

em que  $t_0$  representa o instante inicial e  $U(t, t_0)$  o **operador de impulsão** ou de evolução. Tem-se  $U(t_0, t_0) = 1$ .

Desta equação pode obter-se a equação de Schrödinger (4.52).

P4 – Ao medir uma observável **A** sobre um sistema S caracterizado por uma função de onda  $\psi$ , e que se encontra num estado diferente do estado próprio  $\psi_k$ <sup>46</sup>, a probabilidade de obter para a observável **A** um valor  $\alpha$  tal que  $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha''$  é dada por

$$P(\alpha', \alpha'') = \sum_k |C_k|^2 \quad (4.56)$$

onde o somatório se estende apenas aos valores de  $k$  para os quais  $\alpha' \leq \alpha_k \leq \alpha''$ .

P5 – Se a medida da observável **A** sobre um sistema fornece um valor  $\alpha$  tal que  $\alpha' \leq \alpha_k \leq \alpha''$ , então imediatamente após a medida o estado do sistema será representado por uma função de onda  $\psi'$

$$\psi' = \sum_k C_i \psi_i \quad (4.57)$$

onde o somatório se estende apenas aos valores de  $i$  para os quais  $\alpha' \leq \alpha \leq \alpha''$ , e em que os coeficientes  $C_i$  ficam desconhecidos.

Estes princípios encontram-se aqui expostos apenas para indicar ao leitor que a Física Quântica começa aqui. Tudo o que se deu nas primeiras secções deste capítulo foi apenas uma introdução justificativa do carácter quântico de certos aspectos da Física.

Devido ao carácter elementar destes apontamentos, e à finalidade a que se destinam, não se aprofundará este tema.

---

<sup>46</sup> A função de onda  $\psi$ , de acordo com o teorema de Fourier generalizado, pode ser representada por uma combinação linear de funções, designadas estados próprios:  $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \psi_k$ . Em cada estado próprio  $\psi_k$  o operador **A** tem um valor bem definido,  $\alpha_k$ .

## 4.11. Problemas resolvidos

A resolução dos problemas deste capítulo, com excepção dos que são apenas demonstrações, foi efectuada em Matlab. O leitor deverá procurar as explicações nos comentários que se encontram no próprio programa. Os resultados dos problemas foram postos a seguir a cada programa.

Para poder executar cada programa no próprio Matlab deverá ser efectuado um “copy” → “paste” do texto (se editável) para a área de trabalho do Matlab.

Cada um dos programas chama as Constantes da Física, pelo que previamente estas deverão ser introduzidas sob a forma de um ficheiro com o nome “Constantes”, na pasta “work” do Matlab. (atenção ao C maiúsculo).

### Constantes da Física

Constantes

```
u=1.6605402*1e-27; % Unidade de massa atómica
NA=6.0221367*1e23; % Número de Avogadro
a0=0.529177249*1e-10; % Raio de Bohr
kB=1.380658*1e-23; % Constante de Boltzmann
ke=8.987551787*1e9; % Constante de Coulomb
me=9.1093897*1e-31; % Massa do electrão
eV=1.60217733*1e-19; % Electrão-volt
e=1.60217733*1e-19; % Carga elementar
R=8.314510; % Constante dos gases
G=6.67259*1e-11; % Constante gravitacional
mn=1.6749286*1e-27; % Massa do neutrão
eps0=8.854187817*1e-12; % Permeabilidade eléctrica do vazio
miu0=4*pi*1e-7; % Permeabilidade magnética do vazio
h=6.626075*1e-34; % Constante de Planck
mp=1.672623*1e-27; % Massa do protão
c=2.99792458*1e8; % Velocidade da luz no vazio
sigm=5.6696*1e-8; % Constante de Stefan
Rh=1.0973731568525*1e7; %Constante de Rydberg
```

### Radiação do Corpo Negro

#### 4.11.1. Probl. 4.1

A vista humana tem a sensibilidade máxima à luz para o comprimento de onda de 555 nm. Qual a temperatura do corpo negro que tem o máximo de radiação neste comprimento de onda?

#### RESOLUÇÃO

##### Programa

```
% Vai usar-se a lei do deslocamento de Wien: lbdmax x T = 2,898e-3 m.K
Constantes; % Constantes da Física
lbdmax=555e-9; % comprimento de onda a que corresponde o máximo
TK=2.898e-3/lbdmax; % Temperatura pedida, em kelvin
TC=TK-273.15; % Temperatura pedida, em graus Celsius
```

```
fprintf('A temperatura pedida é: T = %6.1f',TK); fprintf(' kelvin \n')
fprintf('                               = %6.1f',TC); fprintf(' °C \n\n')
```

### Resultados

A temperatura pedida é: T = 5221.6 kelvin  
= 4948.5 °C

#### 4.11.2. Probl. 4.2

O Sol tem um raio de  $6,96 \times 10^8$  m e radia uma potência de  $3,77 \times 10^{26}$  W. Supondo que a sua superfície se pode aproximar de um corpo negro,

- Calcule a temperatura da sua superfície
- Calcule o comprimento de onda a que corresponde o máximo de temperatura. Compare o resultado obtido com o máximo de sensibilidade da vista humana

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```
% a) Vai utilizar-se a lei de Stefan: IS=sigm.em.A.T^4
Constantes; % Constantes da Física
em=1; % Poder emissivo do corpo negro
RS=6.96e8; % Raio do Sol
IS=3.77e26; % Potência radiada pelo Sol
AS=4*pi*RS^2;
TS=(IS/sigm/em/AS)^(1/4); %Temperatura da superfície solar, em kelvin
fprintf('a) Temperatura da superfície solar: T = %4.0f',TS);
fprintf(' kelvin \n')

% b) Utiliza-se a lei de Wien: lbdmax.T = 2,898e-3 m.K
lbdmax=2.898e-3/TS; % comprim. de onda a que <> o max. da temperatura
fprintf('b) Comprimento de onda a que ocorre Tmax: lbd =
%3.1f',lbdmax*1e9); fprintf(' nm \n')
```

### Resultados

- Temperatura da superfície solar: T = 5749 kelvin
- Comprimento de onda a que ocorre Tmax: lbd = 504.1 nm

#### 4.11.3. Probl. 4.3

Considere um corpo negro com a área de  $20 \text{ cm}^2$ , à temperatura de 5000 K.

- Qual a sua potência radiante?
- A que comprimento de onda corresponde o máximo de radiação?
- Calcule a densidade de potência espectral ( $P/\lambda$ ) para os seguintes comprimentos de onda:
  - $\lambda = \lambda_{\text{max}}$
  - $\lambda = 5 \text{ nm}$  (raios UV, raios X)
  - $\lambda = 400 \text{ nm}$  (fronteira entre UV e visível)
  - $\lambda = 700 \text{ nm}$  (fronteira entre o visível e o IR)
  - $\lambda = 1 \text{ mm}$  (IR, micro-ondas)
- Que potência de luz visível radia este corpo?

## RESOLUÇÃO

## Programa

```

% a) Utiliza-se a lei de Stefan: IS=sigm.em.A.T^4
Constantes; % Constantes da Física
em=1; % poder emissivo do corpo negro
A=20e-4; % área radiante do corpo
T=5000; % temperatura do corpo radiante
TK=T+273.15; % temperatura absoluta do corpo radiante
IS=sigm*em*A*T^4; % lei de Stefan
fprintf('a) Potência radiante: %5.3f',IS/1000); fprintf(' kW \n')
%
% b) Usa-se a lei do deslocamento de Wien: lbdmax x T = 2,898e-3 m.K
lbdmax=2.898e-3/TK;
lbdtxt='';
fprintf('b) Comprimento de onda correspondente ao máximo de radiação:
%6.1f',lbdmax*1e9); fprintf(' nm \n')
%
% c) Aplica-se a lei de Plank
k1=2*pi*h*c^2; % constante do numerador da expressão de Planck
k2=h*c/kB; % constante no denominador da expressão de Planck
lbd=logspace(-7,-4,200); % cria o vector de compr. de onda, em metros
for k=1:length(lbd),
    I(k)=k1/(lbd(k)^5*(exp(k2/TK/lbd(k))-1));
end
% loglog(lbd',I); % representação gráfica
%
% c1) Vai determinar-se o máximo da intensidade de radiação
[Imax,lbdmxcl]=max(I); % calcula o máximo e a sua localização
fprintf('c) máximo de radiação: %3.3e',Imax); fprintf(' W/m3 \n')
% comparar a proximidade de lbdmxcl e de lbdmax
% c2)a c5) na lei de Plank substituir lbd(k) pelos valores desejados:
lbd2=5e-9; % comprimento de onda para o cálculo
lbd3=400e-9; % comprimento de onda
lbd4=700e-9; % comprimento de onda
lbd5=1e-3; % comprimento de onda
Ic2=k1/(lbd2^5*(exp(k2/TK/lbd2)-1)); % d. de potência para lbd=5 nm
Ic3=k1/(lbd3^5*(exp(k2/TK/lbd3)-1)); % d. de potência para lbd=400 nm
Ic4=k1/(lbd4^5*(exp(k2/TK/lbd4)-1)); % . de potência para lbd=700 nm
Ic5=k1/(lbd5^5*(exp(k2/TK/lbd5)-1)); % . de potência para lbd=1 mm
disp(' as densidades de potencia são:');
fprintf(' %3.3e',Ic2); fprintf(' %3.3e',Ic3);
fprintf(' %3.3e',Ic4); fprintf(' %3.3e',Ic5); fprintf(' W/m3 \n');

% d) Integra-se a lei de Plank entre 380 e 760 nm, a que corresp. os
% limites de visib. médios da vista humana, e multiplica-se pela área
% radiante do corpo
lbdaux=380:760; % vector de comprimentos de onda, no visível
lbdvis=lbdaux*1e-9;
for k=1:length(lbdvis),
    Ivis(k)=k1/(lbdvis(k)^5*(exp(k2/TK/lbdvis(k))-1));
end
% plot(lbdvis',Ivis); % representação gráfica
IVs=trapz(lbdvis,Ivis)*A;
fprintf('d) Potência radiada no visível: %5.3f',IVs/1000); fprintf('
kW \n')

```

### Resultados

- a) Potência radiante: 70.870 kW
- b) Comprimento de onda correspondente ao máximo de radiação: 549.6 nm
- c) máximo de radiação:  $5.246 \times 10^{13}$  W/m<sup>3</sup>  
as densidades de potencia são:  
1.217e-211 3.989e+013 4.610e+013 1.370e+002 W/m<sup>3</sup>
- d) Potência radiada no visível: 36.383 kW

#### 4.11.4. Probl. 4.4

Supondo que o filamento de tungsténio de uma lâmpada de incandescência, que se encontra à temperatura de 2750 °C, se comporta com um corpo negro,

- a) Determine o comprimento de onda a que corresponde o máximo de energia radiada?
- b) Qual a energia total radiada por mm<sup>2</sup> de área?
- c) Da energia radiada a maior percentagem encontra-se na região UV ou IV? Justifique.

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```
% a) Vai utilizar-se a lei de Wien: lbdmax x T = 2,898e-3 m.K
TK=2750+273.15; % temperatura do filamento em K
Constantes; % carrega o ficheiro com as constantes da Física
lbdmax=2.898e-3/TK; % Comprimento de onda pedido
fprintf('a) Comprimento de onda = %5.1f',lbdmax*1e9); fprintf('
nm\n\n')

% b) Utiliza-se a lei de Stefan: IS=sigm.em.A.T^4
A=1e-6; % Área de emissão
em=1; % Poder emissivo do corpo negro
IS=sigm*em*A*TK^4; % Energia radiada por mm^2
fprintf('b) Energia total radiada = %5.2f',IS); fprintf(' W\n\n')

% c) Utiliza-se a lei de Plank
k1=2*pi*h*c^2; % constante do numerador da expressão de Plank
k2=h*c/kB; % constante no denominador da expressão de Plank

% região UV:
lbdaux=10:10:380;
lbduv=lbdaux*1e-9;
% cria o vector de comprim. de onda UV
% Integra-se a lei de Plank entre 10 e 380 nm, a que corresponde a
% região ultravioleta
for k=1:length(lbduv),
    Iuv(k)=k1/(lbduv(k)^5*(exp(k2/TK/lbduv(k))-1));
end
figure(1);
plot(lbduv',Iuv); % representação gráfica
IUV=trapz(lbduv,Iuv)*A

% região V (Visível)
lbdaux=380:10:760;
lbdv=lbdaux*1e-9;
% cria o vector de comprim. de onda visível
% Integra-se a lei de Plank entre 380 e 760 nm, a que corresponde
```

```

% a região visível
for k=1:length(lbdv),
    Iv(k)=k1/(lbdv(k)^5*(exp(k2/TK/lbdv(k))-1));
end
figure(2);
plot(lbdv',Iv); % representação gráfica
IV=trapz(lbdv,Iv)*A;

% região IV:
lbdaux=780:10:10000;
lbdiv=lbdaux*1e-9;
% cria o vector de comprim. de onda IV
% Integra-se a lei de Plank entre 760 nm, e 10000 nm a que corresponde
% a região infravermelha
for k=1:length(lbdiv),
    Iiv(k)=k1/(lbdiv(k)^5*(exp(k2/TK/lbdiv(k))-1));
end
figure(3);
plot(lbdiv',Iiv); % representação gráfica
IIV=trapz(lbdiv,Iiv)*A

fprintf('c) Energia UV = %5.2f',IUV); fprintf(' W \n')
fprintf(' Energia Vis = %5.2f',IV); fprintf(' W \n')
fprintf(' Energia IV = %5.2f',IIV); fprintf(' W \n\n')

```

### Resultados

- a) Comprimento de onda = 958.6 nm
- b) Energia total radiada = 4.74 W
- c) Energia UV = 0.01 W  
Energia Vis = 0.56 W  
Energia IV = 4.09 W

## Efeito Fotoelétrico

### 4.11.5. Probl. 4.5

A partir da dispersão da luz solar, Thomson calculou o raio clássico do electrão, determinando o valor de  $2,82 \times 10^{-15}$  m. Admita que a luz solar, com intensidade de  $500 \text{ W/m}^2$  incide sobre um disco com este diâmetro.

- a) Qual o tempo necessário para acumular a energia de 1 eV?
- b) Que conclui do resultado, sabendo que as observações indicam que os fotoelectrões são emitidos num tempo inferior a  $10^{-9}$  s, após a incidência da luz?

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```

% Calcula-se a superfície do electrão exposta a radiação solar, a
% seguir a potência que sobre ela incide e finalmente o tempo
% necessário para acumular 1 eV.
Constantes; % Constantes da Física
re=2.82e-15; % raio clássico do electrão
PS=450; % potência por metro quadrado que atinge o electrão
we=e; % energia de 1 eV, expressa no SI

```

```

A=pi*re^2; % superfície exposta é a correspond. à secção transversal
pe=PS*A; % potência que incide sobre o electrão
tp=we/pe; %tempo que demorará a acumular 1 eV
fprintf('Tempo para acumular 1 eV: tempo = %3.2f',tp); fprintf('
segundos \n');

% conversão em horas,minutos, ...
aux=floor(tp)/60;
tps=(aux-floor(aux))*60; % nº de segundos na conversão
aux2=floor(aux)/60;
tpm=(aux2-floor(aux2))*60; % nº de minutos
aux3=floor(aux2)/24;
tph=(aux3-floor(aux3))*24; % nº de horas
aux4=floor(aux3)/30;
tpd=(aux4-floor(aux4))*30;
aux5=floor(aux4)/12;
tpm=(aux5-floor(aux5))*12;
tpa=aux5;
fprintf('
                                =%3.0f',tpa); fprintf('A');
fprintf(' %1.0f',tpm); fprintf('M'); fprintf(' %1.0f',tpd);
fprintf('D');
fprintf(' %1.0f',tph); fprintf('h'); fprintf(' %1.0f',tpm);
fprintf('m');
fprintf(' %1.0f',tps); fprintf('s \n');
    
```

### Resultados

```

Tempo para acumular 1 eV: tempo = 14251152.23 segundos
                                = 0A 5M 14D 22h 5m 12s
    
```

#### 4.11.6. Probl. 4.6

O Lítio o Berílio e o Mercúrio têm energias de saída de 2,3 eV, 3,9 eV e 4,5 eV, respectivamente. Se sobre cada um destes metais incidir um feixe de luz com o comprimento de onda 380 nm,

- Quais deles é que manifestam o efeito fotoelétrico.
- Para cada um dos que o exibem, qual a velocidade máxima de saída dos electrões?

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```

% Calcula-se a energia do fotão. Haverá emissão de electrões se esta
% for superior a energia de saída do metal indicado.
Constantes; % Constantes da Física
lbd=380e-9; % comprimento de onda do fotão
Ef=h*c/lbd; % E=hf=hc/lbd é a energia de um fotão
EfeV=Ef/e; % conversão em EV
fiLi=2.3; % energia de saída do Lítio, em eV
fiBe=3.9; % energia de saída do Berílio, em eV
fiHg=4.5; % energia de saída do Mercúrio, em eV

fprintf('Energia do fotão: Ef = %3.2f',EfeV); fprintf(' eV \n');
% Energia cinética de uma partícula em movimento: Ec=(gama-1)*m*c^2
% donde, resolvendo em ordem a v: ve=c*sqrt(1-1/(Ec/m/c^2+1)^2)
if EfeV>fiLi
    disp('a) O Lítio exhibe efeito fotoelétrico');
    
```

```

    EcLi=EfeV-fiLi;
    ve=c*sqrt(1-1/(EcLi*e/me/c^2+1)^2);
    fprintf('b) A veloc. máx. dos electrões emitidos é %9.0f',ve);
fprintf(' m/s \n');
end
if EfeV>fiBe
    disp('a) O Berílio exhibe efeito fotoeléctrico');
    EcBe=EfeV-fiBe;
    ve=c*sqrt(1-1/(EcBe*e/me/c^2+1)^2);
    fprintf('b) A veloc. máx. dos electrões emitidos é %3.3f',EcBe);
fprintf(' eV \n');
end
if EfeV>fiHg
    disp('a) O Mercúrio exhibe efeito fotoeléctrico');
    EcHg=EfeV-fiHg;
    ve=c*sqrt(1-1/(EcHg*e/me/c^2+1)^2);
    fprintf('b) A veloc. máx. dos electrões emitidos é %3.3f',EcHg);
fprintf(' eV \n');
end

```

### Resultados

Energia do fotão:  $E_f = 3.26 \text{ eV}$

a) O Lítio exhibe efeito fotoeléctrico

b) A veloc. máx. dos electrões emitidos é  $581943 \text{ m/s}$

### 4.11.7. Probl. 4.7

A energia de ligação do Molibdénio é  $4,20 \text{ eV}$ . Determine:

a) O comprimento de onda de corte e a frequência de corte dos seus fotoelectrões.

b) O potencial de paragem, para uma luz incidente com o comprimento de onda de  $180 \text{ nm}$ .

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```

% a) A frequência de corte é tal que a energia cinética máx de saída é
% nula: hf-fi=0 --> fc=fi/h
Constantes; % Constantes da Física
fi=4.2; % energia de saída em eV
fc=fi*e/h; % converte-se fi a joule antes de calcular a freq. corte
lbdc=c/fc; % comprim. de onda de corte
fprintf('a) Comprimento de onda de corte: lbdc = %3.1f',lbdc*1e9);
fprintf(' nm \n');
fprintf('          frequência de corte: fc = %3.3f',fc*1e-15);
fprintf(' PHz \n');
% O potencial de paragem é tal que Ecmáx=e*Us
f=c/180e-9; % frequência da luz incidente
Ecmáx=h*f-fi*e; % energia cinética máxima dos electrões de saída
Us=Ecmáx/e; % potencial de paragem
fprintf('b) Potencial de paragem: Us = %3.1f',Us); fprintf(' V \n');

```

### Resultados

a) Comprimento de onda de corte:  $lbdc = 295.2 \text{ nm}$

frequência de corte:  $fc = 1.016 \text{ PHz}$

b) Potencial de paragem:  $Us = 2.7 \text{ V}$

## Espectros dos gases

### 4.11.8. Probl. 4.8

Calcule o valor de  $n$  associado à risca com o comprimento de onda de 94,96 nm da série de Lyman do hidrogênio.

Poderá este comprimento de onda estar associado às séries da Pashen ou Brackett?

#### RESOLUÇÃO

##### Programa

```
% Vai utilizar-se a expressão da série de Lyman: 1/lbd=Rh(1-1/n^2)
% calculado em ordem a n: n=1/sqrt(1-1/lbd/Rh)
Constantes; % Constantes da Física
lbd=94.6e-9; % comprimento de onda da risca
nq=1/sqrt(1-1/lbd/Rh);
fprintf('O n° quântico associado é: nq =%2.0f',nq); fprintf(' \n')
disp('Não. As outras séries convergem para lbd's mais altos, quando n->
inf.');
```

##### Resultados

O  $n^\circ$  quântico associado é:  $nq = 5$   
Não. As outras séries convergem para lbd's mais altos, quando  $n \rightarrow \text{inf.}$

### 4.11.9. Probl. 4.9

Indique se todas as riscas da série de Balmer se encontram na região de comprimentos de onda visíveis.

Em caso negativo, onde se encontram?

#### RESOLUÇÃO

##### Programa

```
% Utiliza-se a expressão da s. de Balmer: 1/lbd=Rh(1/2^2-1/n^2), n>2
% calculado em ordem a n: n=sqrt(1/(0.25-1/lbd/Rh))
Constantes; % Constantes da Física
% Esta série converge para lbd=364.5nm quando n->inf.:
lbdc=4/Rh;
% Há pois possibilidade de haver riscas fora da região visível, uma
% vez que esta vai de 380 a 760 nm.
% As riscas estarão na faixa ultravioleta:
lbd= 380e-9; n=ceil(sqrt(1/(0.25-1/lbd/Rh)));
disp('Nesta série nem todas as riscas estão na região visível;');
fprintf('para n >= %2.0f',n);
disp(' as riscas estão na região ultravioleta.');
```

##### Resultados

Nesta série nem todas as riscas estão na região visível;  
para  $n \geq 10$  as riscas estão na região ultravioleta.

## Efeito de Compton

### 4.11.10. Probl. 4.10

Um feixe de raios X com a energia de 300 keV é dispersado por um alvo, seguindo o efeito de Compton. Sabendo que os raios se dispersam com um ângulo de  $37^\circ$  em relação ao feixe incidente, determine:

- O desvio de comprimento de onda sofrido pelo feixe.
- A energia do feixe de raios X difundido.
- A energia dos electrões libertados.

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```
% a) Vai utilizar-se a expressão do desvio de Compton,
% dlbd=lbd-lbd0=lbdC(1-cos(teta)).
Constantes; % carrega o ficheiro com as constantes da Física
lbdC=h/me/c; % comprimento de onda de Compton
Ex0=300e3*e; % energia do feixe de raios-X, em joule
teta=37; % desvio dos raios-X
dlbd=lbdC*(1-cos(teta*pi/180)); % desvio no comprimento de onda
fprintf('a) Desvio no comprimento de onda: dlbd = %5.3f',dlbd*1e12);
fprintf(' nm \n')
% b) Calcula-se a energia do feixe difundido a partir do seu
% comprimento de onda
lbd0=h*c/(Ex0); %comprimento de onda dos raios-X incidentes
lbd=lbd0+dlbd; % comprimento de onda dos raios-X difundidos
Ex=h*c/lbd; % energia dos raios-X difundidos
fprintf('b) Energia dos raios difundidos: Ex = %5.3e',Ex);
fprintf(' J'); fprintf(' = %5.1f',Ex/e/1000); fprintf(' keV \n');
% c) Usa-se a conservação da energia
Ee=Ex0-Ex; % por se tratar de um choque elástico a energia conserva-se
fprintf('c) Energia dos electrões libertados: Ee = %5.3e',Ee);
fprintf(' J'); fprintf(' = %5.1f',Ee/e/1000); fprintf(' keV \n');
```

#### Resultados

- Desvio no comprimento de onda: dlbd = 0.489 nm
- Energia dos raios difundidos: Ex = 4.298e-014 J = 268.3 keV
- Energia dos electrões libertados: Ee = 5.081e-015 J = 31.7 keV

### 4.11.11. Probl. 4.11

Um fóton com o comprimento de onda de 0,00160 nm é difundido por um electrão. Para que ângulo de difusão do fóton é que este tem uma energia igual à do electrão emitido?

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```
% a) Em primeiro lugar calcula-se a energia do fóton incidente,
% E0=hc/lbd0:
Constantes; % Constantes da Física
lbd0=0.0016e-9; % comprimento de onda do fóton incidente
E0=h*c/lbd0; % energia deste fóton
```

```
% Uma vez que a energia do fotão difundido e a do electrão recolhido
% são iguais entre si, qualquer delas será metade de E0:
Ef=0.5*E0; % energia do fotão difundido
Ee=0.5*E0; % energia do electrão recolhido
% a partir daqui podem calcular-se o comprimento de onda do fotão
% difundido, o desvio de comprimento de onda e o ângulo de difusão,
% usando a expressão do desvio de Compton:
lbd=h*c/Ef; % comprimento de onda do fotão difundido
% lbd-lbd0=lbdC(1-cos(teta)) --> teta=arccos((lbd-lbd0)/lbdC)*180/pi
lbdC=h/me/c; % comprimento de onda de Compton
teta=acos(1-(lbd-lbd0)/lbdC)*180/pi;
fprintf('Ângulo para o qual as energias são iguais: teta =
%4.1f',teta);
fprintf(' ° \n')
```

### Resultados

Ângulo para o qual as energias são iguais: teta = 70.1 °

### 4.11.12. Probl. 4.12

Um feixe de raios X monocromático com o comprimento de onda de 0,800 nm incide sobre um electrão livre, que adquire a velocidade de  $1,40 \times 10^6$  m/s.

- Determine o desvio de Compton no seu comprimento de onda.
- Com que ângulo é que o fotão foi difundido?

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```
% a) Calcula-se a energia do fotão incidente a partir do seu
% comprimento de onda, e a do electrão recolhido a partir da sua
% velocidade.
Constantes; % Constantes da Física
lbd0=0.800e-9; % comprimento de onda do fotão incidente
E0=h*c/lbd0; % energia deste fotão
ve=1.40e6; % velocidade do electrão recolhido
gama=1/sqrt(1-(ve/c)^2); % factor gama do electrão
Ee=(gama-1)*me*c^2; % energia do electrão recolhido
% Uma vez que o choque é elástico, conserva-se a energia, pelo que
Ex=E0-Ee; % energia dos R-X difundidos
lbd=h*c/Ex; % energia destes R-X
% lbd-lbd0=lbdC(1-cos(teta)) --> teta=arccos((lbd-lbd0)/lbdC)*180/pi
lbdC=h/me/c; % comprimento de onda de Compton
dlbd=lbd-lbd0; % desvio de Compton
teta=acos(1-(lbd-lbd0)/lbdC)*180/pi;
fprintf('a) Desvio de Compton dos R-X: dlbd = %4.3e',dlbd); fprintf('
nm \n')
fprintf('b) Ângulo de difusão do fotão: teta = %4.1f',teta); fprintf('
° \n')
```

### Resultados

- Desvio de Compton dos R-X: dlbd = 2.887e-012 nm
- Ângulo de difusão do fotão: teta = 100.9 °

**4.11.13. Probl. 4.13**

Um fóton com a energia 0,900 MeV é difundido por um electrão em repouso, de tal modo que os ângulos de difusão do fóton ( $\theta$ ) e do electrão ( $\phi$ ) são iguais.

- Determine  $\theta$  e  $\phi$ .
- Calcule a energia e o momento do fóton difundido.
- Calcule a energia e o momento do electrão difundido.

**RESOLUÇÃO***Programa*

```

Constantes; % carrega o ficheiro com as constantes da Física
% Faz-se teta=fi nas expressões do momento linear antes e depois
% da colisão:
% 1) hc/lbd1=hc/lbd2+Ec --> conservação da energia
% 2) h/lbd1=(h/lbd2)cos(teta)+gama.me.ve.cos(fi) -> cons. m. lin em x
% 3) 0=(h/lbd2)sen(teta)-gama.me.ve.sen(fi) -> cons. mom. linear em y
% 4) teta=fi -> dado do problema

% Substituindo (4) em (3) resulta
% 5) h/lbd2=gama.me.ve
% Notando que a energia cinética do electrão é dada por
% Ec=(gama-1).me.c^2,
% substituindo (5) e Ec em (1), e ainda Ef=hc/lbd1 (dado), resulta
% Ef=gama.me.ve.c+(gama-1).me.c^2, ou ainda
% 6) gama.me.ve.c-gama.me.c^2-me.c^2=Ef
% Em (6), resolvendo em ordem a ve vem ve=c.(aux+1)/(aux-1), com
% aux=((Ef+me.c^2)/me.c^2)
Ef=0.900e6*e; % energia do fóton incidente (raios-X), em joule
p1=Ef/c; % momento linear do fóton incidente
lbd1=h*c/Ef; % comprimento de onda dos raios-X incidentes
aux=((Ef+me*c^2)/(me*c^2))^2;
ve=c*(aux-1)/(aux+1); % velocidade do electrão recolhido
gama=1/sqrt(1-(ve/c)^2); % factor gama do electrão
pe=gama*me*ve; % momento linear do electrão
Ec=(gama-1)*me*c^2; % energia cinética do electrão
% A partir da equação (5) obtém-se
p2=gama*me*ve; % momento linear do fóton difundido
% (igual à do electrão)
E2=p2*c; % energia do fóton difundido
% A partir de (2) resulta p1=p2.cos(fi)+pe.cos(fi), donde
fi=acos(p1/(p2+pe))*180/pi; % ângulo de difusão do electrão, em graus
teta=fi; % ângulo de difusão do fóton
fprintf('a) O ângulo de difusão do fóton é: fi = %4.1f',fi);
fprintf(' graus \n')
fprintf(' O ângulo de difusão do electrão é: teta = %4.1f',fi);
fprintf(' graus \n\n')
fprintf('b) A energia do fóton difundido é: E2 = %4.1f',E2/e/1000);
fprintf(' keV \n')
fprintf(' O seu momento linear é: p2 = %4.1e',p2);
fprintf(' kg.m/s \n\n')
fprintf('c) A energia cinética do electrão recolhido é: Ec =
%4.1f',Ec/e/1000);
fprintf(' keV \n')
fprintf(' O seu momento linear é: pe = %4.1e',pe);
fprintf(' kg.m/s \n')

```

### Resultados

- a) O ângulo de difusão do fotão é:  $\theta_i = 42.8$  graus  
O ângulo de difusão do electrão é:  $\theta_e = 42.8$  graus
- b) A energia do fotão difundido é:  $E_2 = 613.0$  keV  
O seu momento linear é:  $p_2 = 3.3e-022$  kg.m/s
- c) A energia cinética do electrão recolhido é:  $E_c = 287.0$  keV  
O seu momento linear é:  $p_e = 3.3e-022$  kg.m/s

## O átomo de hidrogénio

### 4.11.14. Probl. 4.14

Um átomo de hidrogénio transita do estado de energia  $n=6$  para o estado  $n=2$  (modelo de Bohr).

- a) Haverá emissão ou absorção de um fotão?  
b) Calcule a energia, o comprimento de onda e a frequência do referido fotão.

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```
% Vai utilizar-se a expressão da energia total do átomo de hidrogénio
% num determinado estado quântico n:  $E_n = -k_e e^2 / (2 a_0) * (1/n^2)$ ,
Constantes; % Constantes da Física
n=input('Qual Qual o estado de energia inicial, ni= ? ');
% Uma vez que ni>nf (inicial e final), será Ei>Ef
% Note-se que a energia é negativa, logo há emissão de um fotão.
disp('a) há emissão de um fotão, porque Ei>Ef');
Ef=-k_e*e^2/(2*a0)*((1/n^2)-(1/2^2)); % energia do fotão igual a Ei>Ef
lbda=h*c/Ef; % comprimento de onda do fotão emitido
f=c/lbda; % frequência do mesmo fotão
fprintf('b) Energia do fotão emitido: Ef = %4.3f',Ef/e);
fprintf(' eV \n')
fprintf(' Comprimento de onda: lbda = %4.3f',lbda*1e9);
fprintf(' nm \n')
fprintf(' Frequência do fotão: f = %4.3f',f*1e-12);
fprintf(' THz \n')
```

#### Resultados

- a) há emissão de um fotão, porque  $E_i > E_f$   
b) Energia do fotão emitido:  $E_f = 3.023$  eV  
Comprimento de onda:  $\lambda = 410.070$  nm  
Frequência do fotão:  $f = 731.076$  THz

### 4.11.15. Probl. 4.15

Um átomo de hidrogénio encontra-se no seu primeiro estado excitado ( $n=2$ ). Utilizando o modelo do átomo de Bohr determine:

- a) O raio da órbita.  
b) Os momentos, linear e angular, do electrão.  
c) As suas energias, cinética, potencial e total.

**RESOLUÇÃO****Programa**

```

% Vão ser usadas as expressões do átomo de hidrogénio para o raio,
% momento linear e angular e energia cinética potencial e total
Constantes; % Constantes da Física
% a)
n=2; % número quântico do átomo
rn=a0*n^2; % raio da órbita correspondente a n=2
% b)
pn=h/(2*pi*rn)*n; % momento linear do electrão
ln=pn*rn; % momento angular
% c)
Ec=pn^2/(2*me); % energia cinética
Ep=-ke*e^2/(rn); % energia potencial
Et=Ec+Ep; % energia total

fprintf('a) Raio da órbita correspondente a n=2: rn = %4.e',rn);
fprintf(' m \n')
fprintf('b) Momento linear do electrão pn = %4.3e',pn);
fprintf(' J.s \n')
fprintf(' Momento angular ln = %4.3e',ln); fprintf(' N.m.s \n')
fprintf('c) Energia cinética do electrão: Ec = %4.3f',Ec/e);
fprintf(' eV \n')
fprintf(' Energia potencial: Ep = %4.3f',Ep/e);
fprintf(' eV \n')
fprintf(' Energia total: Et = %4.3f',Et/e);
fprintf(' eV \n')

```

**Resultados**

- a) Raio da órbita correspondente a n=2: rn = 2e-010 m  
b) Momento linear do electrão pn = 9.964e-025 J.s  
Momento angular ln = 2.109e-034 N.m.s  
c) Energia cinética do electrão: Ec = 3.401 eV  
Energia potencial: Ep = -6.803 eV  
Energia total: Et = -3.401 eV

**4.11.16. Probl. 4.16**

Mostre que a velocidade de um electrão no átomo de hidrogénio, na órbita de ordem  $n$  (modelo de Bohr) é dada por

$$v_n = \frac{k_e e^2}{n \hbar}$$

**RESOLUÇÃO**

Este problema resolve-se sem o auxílio do Matlab.

Uma das condições para a estabilidade da órbita, suposta circular, é que a força de atracção de Coulomb deve ser igual em módulo à força de inércia:

$$k_e \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

Uma vez que a quantificação do momento angular, postulada por Bohr, impõe  $r m_e v = n\hbar$ , com  $n$  inteiro, substituindo o valor de  $v$  que dela se obtém na primeira expressão, resulta imediatamente a equação pretendida.

#### 4.11.17. Probl. 4.17

Uma partícula de carga  $q$  e massa  $m$  move-se, com uma velocidade  $\mathbf{v}$  perpendicular a um campo magnético  $\mathbf{B}$ . A trajectória é circular. Se o momento angular da partícula em relação ao centro estiver quantificado por  $mvr = n\hbar$ , mostre que os valores dos raios das trajectórias permitidos são dados por

$$r_n = \sqrt{\frac{n\hbar}{qB}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

#### RESOLUÇÃO

Este problema também se resolve sem o auxílio do Matlab.

A força magnética que se exerce sobre uma carga em movimento é dada por  $\mathbf{F}_B = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Uma vez que  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$  são perpendiculares fica  $F_B = qvB$ . Sendo a órbita circular a força de inércia associada é dada por  $m_e v^2 / r$ . Esta força equilibra  $F_B$ , a todo o momento, pelo que  $m_e v^2 / r = qBv \rightarrow qBr = m_e v$ . Como a quantificação do momento angular impõe  $m_e v r = n\hbar$ , comparando as duas expressões resulta  $qBr = n\hbar / r$ . Resolvendo em ordem a  $r$  obtém-se a expressão pretendida.

### Ondas de matéria

#### 4.11.18. Probl. 4.18

Calcule o comprimento de onda de Broglie associado a um protão que se move com a velocidade de  $1,00 \times 10^6$  m/s.

#### RESOLUÇÃO

##### Programa

```
% Utiliza-se a expressão de Broglie que associa um comprimento de onda
% à matéria: lbd=h/p
Constantes; % Constantes da Física
vp=1.00e6; % velocidade do protão
gama=1/sqrt(1-(vp/c)^2); % factor gama do protão
% (uma vez que vp se encontra 2 ordens de grandeza abaixo de c poderia
% usar-se a expressão clássica do momento linear)
pp=gama*mp*vp; % momento linear do protão
lbd=h/pp; % comprim. de onda de Broglie do protão a esta velocidade.
fprintf('Comprimento de onda de Broglie do protão: lbd =
%4.1f', lbd*1e15);
fprintf(' fm \n')
```

##### Resultados

Comprimento de onda de Broglie do protão: lbd = 396.1 fm

**4.11.19. Probl. 4.19**

Considere uma partícula livre em movimento.

a) Mostre que a frequência  $f$ , e o comprimento de onda  $\lambda$  de estão relacionados pela expressão

$$\left(\frac{f}{c}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}, \quad \text{com } \lambda_c = \frac{h}{mc}$$

b) Será possível, que uma partícula com massa diferente de zero tenha o mesmo comprimento de onda e a mesma frequência que um fóton? Porquê?

**RESOLUÇÃO**

a) Da teoria da relatividade sabe-se que a energia e o momento linear de uma partícula (mesmo sem massa) estão ligados por  $E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2$ . Desta expressão, obtém-se  $E = pc$  para partículas de massa nula (caso do fóton), ou  $E = mc^2$  para partículas sem velocidade.

Foi postulado por Broglie que  $\lambda = \frac{h}{p}$  (comprimento de onda da partícula) e que

$f = \frac{E}{h}$  (frequência da partícula). Tem-se então  $p = h/\lambda$  e  $E = hf$ , que substituídos

na 1ª equação dão

$h^2 f^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} c^2 + (mc^2)^2$ . Dividindo ambos os membros por  $h^2 c^2$  e atendendo a que

$\lambda_c = \frac{h}{mc}$ , resulta a equação que se pretende obter.

b) Num fóton  $\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda}$ , que substituído na equação dada implicaria  $\lambda_c = \infty$ . Mas  $\lambda_c$  é uma constante da Física, pelo que não é possível uma partícula de massa diferente de zero ter o mesmo comprimento de onda e a mesma frequência que um fóton.

**4.11.20. Probl. 4.20**

Um feixe de neutrões, com a velocidade de 0,400 m/s, incide sobre uma dupla fenda com 1,00 mm de separação. O “array” de detectores de neutrões está colocado a 10,0 m das fendas.

a) Qual o comprimento de onda de “de Broglie” destes neutrões?

b) A que distância do eixo se encontra o 1º mínimo no “array” de detectores?

c) Quando um neutrão atinge o detector, pode saber-se através de que fenda é que passou?

**RESOLUÇÃO***Programa*

```

% a) Utiliza-se a expressão de Broglie que associa um comprimento
% de onda à matéria: lbd=h/p
Constantes; % Constantes da Física
vn=0.400; % velocidade do feixe de neutrões
pn=mn*vn; % momento linear de um neutrão do feixe
lbd=h/pn; % compr. de onda de Broglie de um neutrão a esta velocidade.
fprintf('a) Comprimento de onda do neutrão: lbd = %4.1f',lbd*1e9);
fprintf(' nm \n');
% b) Usa-se a expressão das interferências pela dupla fenda:
% ym=(m+1/2).lbd.D/d (localização dos mínimos)
D=9.0; % distância do "array" de detectores às fendas
d=0.80e-3; % distância entre as fendas
m=0; % porque se pede a localização do 1º mínimo
ym=(m+1/2)*lbd*D/d; % localização do 1º mínimo das interferências
fprintf('b) O 1º mínimo encontra-se a ym = %4.3f',ym*1000);
fprintf(' mm \n');
disp('c) Não se pode dizer que um determinado neutrão passa por uma
fenda ou por outra,')
disp(' uma vez que aqui o neutrão se está a comportar como uma
onda,')
disp(' passando simultâneamente pelas duas fendas.');
```

### Resultados

- a) Comprimento de onda do neutrão: lbd = 989.0 nm  
b) o 1º mínimo encontra-se a ym = 5.563 mm  
c) Não se pode dizer que um determinado neutrão passa por uma fenda ou por outra,  
uma vez que aqui o neutrão se está a comportar como uma onda,  
passando simultaneamente pelas duas fendas.

### 4.11.21. Probl. 4.21

O poder resolvente de um microscópio depende do comprimento de onda utilizado. Para poder “observar” um átomo será necessária uma resolução melhor que  $0,99 \times 10^{-11}$  m.

- a) Utilizando electrões (microscópio electrónico), qual a sua energia cinética mínima?  
b) Se forem utilizados fotões, qual deverá ser a sua energia mínima e o respectivo comprimento de onda? Em que zona do espectro electromagnético estará esta radiação?

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```

Constantes; % carrega o ficheiro com as constantes da Física
% a) Utiliza-se a expressão de Broglie, que relaciona o comprimento de
% onda de uma partícula com o seu momento linear: lbd=h/p
lbd=0.99e-11;
pe=h/lbd; % momento linear do electrão
% A partir da definição do momento linear calcula-se v e depois gama
% pe=gama*me*ve --> gama*ve=pe/me; pondo beta=v/c -->
% beta/sqrt(1-beta^2)=pe/(me*c) -->
% beta=sqrt((pe/me/c)^2/(1+(pe/me/c)^2))
beta=sqrt((pe/me/c)^2/(1+(pe/me/c)^2));
ve=beta*c;
gama=1/sqrt(1-beta^2);
Ec=(gama-1)*me*c^2;
```

```

fprintf('a) Energia cinética mínima de cada electrão Ec =
%4.3f',Ec/e/1000);
fprintf(' keV \n');
% b) Utilizam-se as expressões do momento linear e da energia do fóton
pfot=h/lbd;
Ecfot=pfot*c;
fprintf('b) Energia de cada fóton Ecfot = %4.3f',Ecfot/e/1000);
fprintf(' keV \n');
disp(' Trata-se de raios-X')

```

### Resultados

- a) Energia cinética mínima de cada electrão  $E_c = 15.123$  keV  
b) Energia de cada fóton  $E_{cfot} = 125.237$  keV  
Trata-se de raios-X

## Princípio da incerteza

### 4.11.22. Probl. 4.22

Um electrão e uma pequena esfera com a massa de 20 g têm a mesma velocidade de 500 m/s, com uma exactidão de 0,010 %. Com que tolerância é que se pode determinar a posição de cada um destes objectos?

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```

% Vai usar-se a expressão do princípio da incerteza, de Heisenberg.
Constantes; % carrega o ficheiro com as constantes da Física
m1=20e-3; % massa da pequena esfera
v=500; % velocidade comum ao electrão e à pequena esfera
dv=0.010/100*500; % incerteza na velocidade acima
dxl=h/(4*pi*m1*dv); % incerteza na determinação da posição da esfera
dxe=h/(4*pi*me*dv); % incerteza na determinação da posição do electrão
disp('As incertezas teóricas na determinação das posições são:')
fprintf(' Pequena esfera: dxl = %4.3e',dxl); fprintf(' m \n');
fprintf(' Electrão: dxe = %4.3e',dxe); fprintf(' m \n');

```

#### Resultados

As incertezas teóricas na determinação das posições são:  
Pequena esfera:  $dx_l = 5.273e-032$  m  
Electrão:  $dxe = 1.158e-003$  m

### 4.11.23. Probl. 4.23

Mostre que se um electrão estiver confinado ao interior de um núcleo atómico, de diâmetro igual a  $2 \times 10^{-15}$  m, a sua velocidade deverá ser expressa por uma expressão relativista, enquanto que um protão confinado ao mesmo núcleo se pode movimentar de forma não relativista.

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```

% Utiliza-se o princípio da incerteza, de Heisenberg:  $\Delta p \cdot \Delta x > h/(4 \cdot \pi)$ 

```

```

% O valor de dx será igual ao diâmetro do núcleo
Constantes; % Constantes da Física
dx=2e-15; % incerteza na posição do electrão
dp=h/(4*pi*dx);
% mas p=gama*m*v --> (v/c)^2=(p/mc)^2/(1+(p/mc)^2)
% para o electrão:
dve=dp/me/sqrt(1+(dp/(me*c))^2);
% para o protão:
dvp=dp/mp/sqrt(1+(dp/(mp*c))^2);
fprintf('- A incerteza para a velocidade deste electrão é
%4.3f',dve/c);
fprintf('c, \n');
disp(' pelo que devem ser usadas expressões relativistas.')
fprintf('- A incerteza para a velocidade deste protão é %4.3f',dvp/c);
fprintf('c, \n');
disp(' pelo que não é preciso usar expressões relativistas.')

```

#### Resultados

- A incerteza para a velocidade deste electrão é 1.000c, pelo que devem ser usadas expressões relativistas.
- A incerteza para a velocidade deste protão é 0.053c, pelo que não é preciso usar expressões relativistas.

#### 4.11.24. Probl. 4.24

O frango “fuzzy” vive num mundo em que a constante de Planck tem o valor  $2 \cdot \pi \cdot \pi \cdot J \cdot s$ . Sabendo que está confinado a uma capoeira de base circular com o raio de 1,0 m, qual a incerteza na sua velocidade? Massa do frango=1,2 kg

#### RESOLUÇÃO

##### Programa

```

% Utiliza-se o princípio da incerteza, de Hisenberg: dp.dx>h/4pi
Constantes; % carrega o ficheiro com as constantes da Física
% O valor de dx será igual ao diâmetro da capoeira
mf=1.2; % massa do frango;
dx=2; % incerteza na sua posição (igual ao diâmetro da base)
h1=2*pi*pi; % constante de Planck no mundo em que vive o frango
dp=h1/(4*pi*dx); % cálculo da incerteza do momento linear
dv=dp/mf; % incerteza na velocidade do frango
fprintf('- A incerteza para a velocidade do frango é de %4.3f',dv);
fprintf(' m/s. \n');

```

#### Resultados

- A incerteza para a velocidade do frango é de 0.654 m/s.

#### 4.11.25. Probl. 4.25

Segundo o modelo de Bohr, o núcleo de um átomo tem o diâmetro da ordem de  $10^{-14}$  m. Para um electrão confinado ao núcleo, o seu comprimento de onda de Broglie será da mesma ordem de grandeza ou inferior.

- Qual será a energia cinética de um electrão confinado ao núcleo?
- Com base no resultado anterior será de esperar encontrar um electrão no interior do núcleo? Justifique.

## RESOLUÇÃO

### Programa

```

% Resolução:
% a) passos para a resolução:
% 1. Com o comprimento de onda calcula-se o momento linear: lbd=h/p
Constantes; % Constantes da Física
lbd=1e-14; % comprimento de onda do electrão
pe=h/lbd; % momento linear do electrão
% 2. A partir da definição do momento linear calcula-se v e depois
gama
%     pe=gama*me*ve --> gama*ve=pe/me; pondo beta=v/c -->
%     beta/sqrt(1-beta^2)=pe/(me*c) -->
%     beta=sqrt((pe/me/c)^2/(1+(pe/me/c)^2))
beta=sqrt((pe/me/c)^2/(1+(pe/me/c)^2));
ve=beta*c;
gama=1/sqrt(1-beta^2);
% 3. Calcula-se a energia cinética: Ec=(gama-1)*m*c^2
Ec=(gama-1)*me*c^2;
fprintf('a) Momento linear = %3.6e',pe); fprintf(' kg.m/s \n')
fprintf('   velocidade = %3.6e',ve); fprintf(' m/s \n');
fprintf('   v/c = %1.9f',beta); fprintf('\n')
fprintf('   energia cinética = %3.6e',Ec); fprintf(' J \n')
fprintf('   Ec em eV = %3.3e',Ec/(e*1e6)); fprintf(' MeV \n\n')
%
% b) Vai usar-se o princípio da incerteza: dp.dx>h/(4*pi)
dxe=1e-14; % porque o electrão estaria confinado ao núcleo
dpe=h/(4*pi*dxe); % incerteza resultante pat o momento linear
dve=dpe/(gama*me);
fprintf('b) incerteza na velocidade = %3.3e',dve); fprintf(' m/s \n')
fprintf('   nada se conclui sobre a possibilidade do electrão \n')
fprintf('   ser encontrado no interior do núcleo. \n\n')

```

### Resultados

- a) Momento linear = 6.626075e-020 kg.m/s  
 velocidade = 2.997899e+008 m/s  
 v/c = 0.999991507  
 energia cinética = 1.978277e-011 J  
 Ec em eV = 1.235e+002 MeV
- b) incerteza na velocidade = 2.386e+007 m/s  
 nada se conclui sobre a possibilidade do electrão  
 ser encontrado no interior do núcleo.

## Função de onda

### 4.11.26. Probl. 4.26

Um electrão livre tem como função de onda  $\psi(x) = A \sin(5,00 \times 10^{10} x)$ , com  $x$  expresso em metros.

- Qual o seu comprimento de onda de “de Broglie”?
- Qual o seu momento linear?
- Qual a sua energia, em eV?

## RESOLUÇÃO

### Programa

```

Constantes; % Constantes da Física
% a) Obtém-se lbd directamente a partir de psi: A função de onda
% descreve um ciclo completo quando x varia desde x1=0 até
% 5.00e10*x2=2*pi, donde lbd=x2-x1=2*pi/(5.00e10)
lbd=2*pi/(5.00e10); % comprimento de onda (de Broglie) deste electrão
% b) Usa-se a relação de Broglie entre lbd e momento linear: lbd=h/p:
pe=h/lbd; % momento linear do electrão
% c) utiliza-se a expressão da energia cinética
ve=pe/me; % uma vez que ve << c pode usar-se a expressão clássica
Ec=0.5*me*ve^2; % energia cinética do electrão
fprintf('a) Comprimento de onda do electrão lbd = %4.3f', lbd*1e9);
fprintf(' nm \n');
fprintf('b) Momento linear do electrão pe = %4.3e', pe);
fprintf(' kg.m/s \n');
fprintf('c) Energia cinética do electrão Ec = %4.3f', Ec/e);
fprintf(' eV \n');
    
```

### Resultados

- a) Comprimento de onda do electrão  $lbd = 0.126$  nm  
 b) Momento linear do electrão  $pe = 5.273e-024$  kg.m/s  
 c) Energia cinética do electrão  $Ec = 95.250$  eV

#### 4.11.27. Probl. 4.27

Uma partícula é descrita pela seguinte função de onda:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}}$$

em que  $a > 0$  e  $-\infty < x < +\infty$ .

Qual a probabilidade da partícula se encontrar na região  $-a < x < +a$  ?

## RESOLUÇÃO

O problema resolve-se analiticamente.

A densidade de probabilidade de encontrar o electrão no posição  $x$  é dada por  $|\psi|^2(x)$

A probabilidade de encontrar o electrão no intervalo  $dx$  é dada por  $p(dx) = |\psi|^2(x) \cdot dx$ .

A probabilidade de encontrar o electrão no intervalo  $(-a, a)$  é dada por

$p(-a, a) = \int_{-a}^a |\psi|^2(x) \cdot dx$ . Substituindo  $\psi(x)$  pelo seu valor, correspondente à descrição da partícula, resulta

$$p(-a, a) = \int_{-a}^a \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}(x) \cdot dx = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{a} \left[ \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-a}^a = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{2}$$

## Equação de Schrödinger

### 4.11.28. Probl. 4.28

Um electrão encontra-se confinado ao interior de uma região unidimensional com o comprimento de 0,1 nm. Para os seus 4 primeiros estado de energia determine:

- Os comprimentos de onda de Broglie do electrão.
- Os valores dos momentos lineares e energias, estas em eV.
- A energia do fóton libertado na transição do electrão dos estados  $n = 4, 3, 2$  para o estado  $n=1$ .

### RESOLUÇÃO

#### Programa

```
% A função de onda de um electrão contido numa "caixa" unidimensional
% de comprimento L é dado por psi(x)=psi0*sen(n*pi*x/L) (da teoria)
% Da expressão de psi conclui-se que lbd=2*L/n.
% O mom. linear será dado, para cada estado n, por pn=h/lbd=n*h/(2*L).
% A energia (toda cinética) será En=1/2*me*(pn/me)^2
Constantes; % Constantes da Física
L=0.1e-9; % comprimento da região
lbd=zeros(1,4); p=zeros(1,4); Ec=zeros(1,4); % inicialização valores
for n=1:4,
    lbd(n)=2*L/n;
    p(n)=h./lbd(n);
    Ec(n)=0.5*me*(p(n)/me).^2;
end
% O comprimento de onda dos fótons libertados nas transições entre um
% electrão do estado 4, 3 ou 2, para o estado 1 calcula-se por
% f=(Ei-Ef)/h e os comprimentos de onda por lbd=c/f:
f41=(Ec(4)-Ec(1))/h; f31=(Ec(3)-Ec(1))/h; f21=(Ec(2)-Ec(1))/h; % frqs
lbdfot=c./[f41, f31, f21]; % % comprimentos de onda
disp('a) Comprimentos de ondas do electrão para n = 1, 2, 3, 4:')
fprintf('    lbd = %4.3f',lbd*1e9); fprintf(' nm \n');
disp('b) - Momentos lineares do electrão:')
fprintf('    p = %3.3e',p); fprintf(' kg.m/s \n');
disp(' - Energias do electrão:')
fprintf('    Ec = %4.3f',Ec/e); fprintf(' eV \n');
disp('c) Compr. de onda dos fótons libertados nas transições n->1:')
fprintf('    lbdfot = %4.3f',lbdfot*1e9); fprintf(' nm. \n');
```

#### Resultados

- Compr. de ondas do electrão para  $n = 1, 2, 3, 4$ :  
 $lbd = 0.200 \quad lbd = 0.100 \quad lbd = 0.067 \quad lbd = 0.050 \text{ nm}$
- Momentos lineares do electrão:  
 $p = 3.313e-024 \quad p = 6.626e-024 \quad p = 9.939e-024 \quad p = 1.325e-023 \text{ kg.m/s}$   
 - Energias do electrão:  
 $Ec = 37.603 \quad Ec = 150.412 \quad Ec = 338.427 \quad Ec = 601.648 \text{ eV}$
- Comprimentos de onda dos fótons libertados nas transições  $n \rightarrow 1$ :  
 $lbdfot = 2.198 \quad lbdfot = 4.121 \quad lbdfot = 10.991 \text{ nm.}$



## 5. CONSTANTES, FORMULÁRIOS E TABELAS

### 5.1. Constantes matemáticas

$$e = 2.7182\ 81828\ 45904\ 52353\ 60287$$

$$\pi = 3.1415\ 92653\ 58979\ 32384\ 62643$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\ 13562\ 37309\ 50488$$

$$\sqrt{3} = 1.7320\ 50807\ 56887\ 72935$$

$$\sqrt{10} = 3.1622\ 77660\ 16837\ 93320$$

### 5.2. Constantes fundamentais da Física

Nome da constante	Símbolo	Valor + (incerteza) + unidades
Carga eléctrica elementar	$e$	$1,602\ 177\ 33\ (4\ 9) \times 10^{-19}\ \text{C}$
Comprimento de onda de Compton	$\lambda_C$	$2,426\ 310\ 58\ (2\ 2) \times 10^{-12}\ \text{m}$
Constante de Boltzmann	$k_B$	$1,380\ 658\ (12) \times 10^{-23}\ \text{J.K}^{-1}$
Constante de Coulomb	$k_e$	$8,987\ 551\ 787 \times 10^9\ \text{Nm}^2\text{C}^{-2}$ (exacto)
Constante de Faraday	$F$	$9,648\ 670\ (54) \times 10^4\ \text{C.mol}^{-1}$
Constante de Josephson	$K_J$	$4,835\ 976\ 7\ (14) \times 10^4\ \text{Hz.V}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6,626\ 075\ (40) \times 10^{-34}\ \text{J.s}$ (exacto)
Constante de Stefan	$\sigma$	$5,670\ 400 \times 10^{-8}\ \text{W.m}^{-2}\text{K}^{-4}$
Constante dos gases	$R$	$8,314\ 510\ (70)\ \text{J.K}^{-1}\text{.mol}$
Constante gravitacional	$G$	$6,672\ 59(8\ 5) \times 10^{-11}\ \text{N.m}^2\text{.kg}^{-2}$
Electrão-volt (unidade de energia)	$eV$	$1,602\ 177\ 33(4\ 9) \times 10^{-19}\ \text{J}$
Massa do electrão	$m_e$	$9,109\ 389\ 7(54) \times 10^{-31}\ \text{kg}$
Massa do neutrão	$m_n$	$1,674\ 928\ 6(10) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Massa do protão	$m_p$	$1,672\ 623(10) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Momento magnético de Bohr	$\mu_B$	$9,274\ 015\ 4(31) \times 10^{-24}\ \text{J.T}^{-1}$
Número de Avogadro	$N_A$	$6,022\ 136\ 7(36) \times 10^{23}$ partículas/mole
Permeabilidade eléctrica do vazio	$\epsilon_0$	$8,854\ 187\ 817 \times 10^{-12}\ \text{C}^2\text{.N}^{-1}\text{.m}^{-2}$ (exacto)
Permeabilidade magnética do vazio	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}\ \text{T.m.A}^{-1}$ (exacto)
Raio de Bohr	$a_0$	$0,529\ 177\ 249(24) \times 10^{-10}\ \text{m}$
Unidade de massa atómica	$u$	$1,660\ 540\ 2(10) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Velocidade da luz no vazio	$c$	$2,997\ 924\ 58 \times 10^8\ \text{m.s}^{-1}$ (exacto)

## 5.3. Formulário de Matemática

### 5.3.1. Álgebra elementar

#### Fracções

soma  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

multiplicação  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

divisão  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

#### Potências

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \times n} \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

#### Factorização

quadrado perfeito:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

diferença de quadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

#### Equações

1º grau:  $ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$

2º grau:  $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

### 5.3.2. Logaritmos e exponenciais

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^p) = p \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log x \equiv \log_{10} x \quad \ln x \equiv \log_e x$$

$$\ln x = 2.302585 \times \log x$$

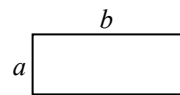
$$\ln e = 1 \quad \ln 1 = 0$$

### 5.3.3. Geometria

#### Rectângulo de lados $a$ e $b$

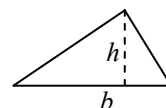
Perímetro:  $P = 2(a + b)$

Área:  $A = a \times b$



#### Triângulo de base $b$ e altura $h$

Área:  $A = \frac{1}{2}b \times h$

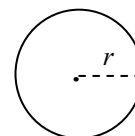


#### Circunferência / círculo de raio $r$

Diâmetro:  $d = 2r$

Perímetro:  $P = 2\pi r$

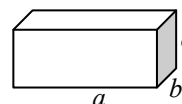
Área:  $A = \pi r^2$



#### Paralelepípedo de lados $a$ , $b$ e $c$

Área da base:  $A = ab$

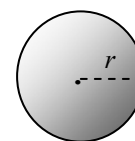
Volume:  $V = abc$



#### Esfera de raio $r$

Área:  $A = 4\pi r^2$

Volume:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

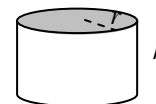


#### Cilindro com base de raio $r$ e altura $h$

Área da base:  $A_b = \pi r^2$

Área lateral:  $A_l = 2\pi r \ell$

Volume:  $V = \pi r^2 \ell$



Ângulo sólido:  $d\Omega = dA / r^2$

### 5.3.4. Limites

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

### 5.3.5. Séries

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \dots$$

$$(1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} - \frac{63x^5}{256} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

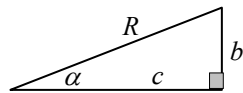
$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2} x^2 \pm \frac{1}{3} x^3 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (x \text{ em radianos})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (x \text{ em radianos})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (x \text{ rad}, |x| < \pi/2)$$

### 5.3.6. Trigonometria

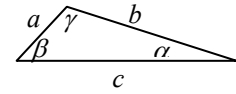


Teorema de Pitágoras:  $b^2 + c^2 = R^2$

$$\sin \alpha = \frac{b}{R} \quad \cos \alpha = \frac{c}{R} \quad \tan \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(a \pm b) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(a \mp b) \right]$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left[ \frac{1}{2}(a + b) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(a - b) \right]$$

$$\cos a - \cos b = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(a + b) \right] \sin \left[ \frac{1}{2}(b - a) \right]$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

### 5.3.7. Derivadas

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \log a$$

$$\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + (\log u) u^v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (uv) = u^{(n)} + n u^{(n-1)} v' + \dots + C_r^n u^{(n-r)} v^{(r)} + \dots + u v^{(n)}$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \log a}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctan} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cot x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

### 5.3.8. Integrais indefinidos

$$\int v du = vu - \int u dv$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \ln ax dx = (x \ln ax) - x + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$$

$$\int \frac{x dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln(ax+b) + C$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{x+a}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \quad (a^2-x^2 > 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} \quad (a^2-x^2 > 0)$$

$$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax + C$$

$$\int \tan ax dx = \frac{1}{a} \ln(\cos ax) + C$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax) + C$$

$$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) + C$$

$$\int \operatorname{csc} ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{csc} ax - \cot ax) + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$$

## 5.4. Formulário de Física

### 5.4.1. Mecânica dos sólidos

$\vec{r}$  vector de posição da partícula

$\vec{v}$  velocidade linear da partícula

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{a}$  aceleração da partícula

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Movimento circular:

$\vec{\omega}$  velocidade angular da partícula

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$a = \omega^2 r$$

2ª lei de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Momento linear  $\vec{p} = m\vec{v}$

Teorema do momento linear (lei de Newton)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Momento angular  $\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$I$  momento de inércia

Momento de inércia de uma partícula de massa  $m$  que descrever um movimento circular uniforme de raio  $R$ :

$$I = mR^2$$

Momento angular de um corpo rígido que roda com velocidade angular  $\vec{\omega}$  em relação ao seu eixo de simetria:

$$\vec{\ell} = I\vec{\omega}$$

Momento de uma força em relação a um ponto:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Teorema do momento angular

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

Energia cinética:  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Energia potencial:  $E_p = mgh$

Trabalho exercido por uma força:  $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$

Lei da atracção universal:  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Lei de Hooke:  $\sigma = Y\varepsilon$

( $\sigma$  tensão mecânica,  $\varepsilon$  deformação relativa,  $Y$  módulo de elasticidade de Young)

### 5.4.2. Mecânica dos fluidos

Pressão exercida num ponto:  $p = \frac{F}{S}$

Lei fundamental da hidrostática:

$$\Delta p = \rho g \Delta h$$

Teorema de Arquimedes  $I = \rho_f g V_i$

( $I$  impulsão,  $\rho_f$  massa volúmica do fluido,  $V_i$  volume imerso do corpo)

Caudal:  $q = VS$  ( $V$  velocidade,  $S$  área)

Número de Reynolds:  $R_e = VD\gamma / \mu$

( $V$  velocidade,  $D$  diâmetro da tubagem,  $\gamma$  peso volúmico,  $\mu$  viscosidade do fluido)

Equação de Bernouilli para fluidos ideais

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = C^{te}$$

( $V$  velocidade,  $g$  aceleração da gravidade,  $p$  pressão,  $\gamma$  peso volúmico,  $z$  cota geométrica)

### 5.4.3. Electrotecnia

Lei de Coulomb:  $F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$

Campo eléctrico:  $\vec{E} = \vec{F} / q_0$  (volt/metro)

Densidade volumétrica de carga eléctrica:  $\rho = q / V$  (carga por unidade de volume)

Densidade superficial de carga eléctrica:  $\sigma = q / S$  (carga por unidade de área)

Potencial num ponto:  $U_p = -\int_{\infty}^p \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Diferença de potencial entre A e B:

$$U_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Se o campo for uniforme na direcção de  $s$

$$V_{AB} = E d_{AB}$$

Capacidade (definição):  $C = \frac{q}{U}$

Capacidade de um condensador plano:

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

Corrente eléctrica:  $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$

Densidade de corrente:  $J = \frac{I}{A}$

Lei de ohm:  $J = \sigma E \rightarrow U = RI$

Resistência eléctrica de um condutor

$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

Potência dissipada numa resistência (lei de Joule)  $P = RI^2 = U^2 / R$

Associação de resistências

em série:  $R = \sum_{i=1}^N R_i$  em paralelo:  $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$

Associação de bobinas

em série:  $L = \sum_{i=1}^N L_i$  em paralelo:  $\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{L_i}$

Associação de condensadores

em série:  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$  em paralelo:  $C = \sum_{i=1}^N C_i$

Leis de Kirchoff

nós:  $\sum_{k=1}^n i_k = 0$  malhas:  $\sum_{k=1}^m u_k = 0$

Força magnética sobre carga em movimento:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Força magnética entre condutores paralelos:

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

( $F$  força,  $\ell$  comprimento,  $\mu_0$  permeabilidade magnética do meio,  $I_1$  e  $I_2$  correntes nos condutores 1 e 2,  $d$  distância entre condutores)

Força electromotriz induzida por variação de

fluxo:  $e = -\frac{d\phi}{dt}$

Reactância de uma bobina:  $X_L = \omega L$

( $\omega = 2\pi f$  frequência angular,  $f$  frequência,  $L$  coeficiente de auto-indução)

Reactância de um condensador:  $X_C = \frac{1}{\omega C}$

( $C$  capacidade do condensador)

Impedância do circuito RLC série:

$$\vec{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Potência aparente:  $Q = V_{ef} I_{ef}$

Potência activa:  $P = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi$

Potência reactiva:  $S = V_{ef} I_{ef} \sin \varphi$

( $\varphi$  defasagem entre a tensão e a corrente)

Transformador ideal (ligação magnética perfeita e semperdas):

$$\frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2} \quad N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

( $u$  tensão,  $i$  corrente,  $N$  nº de espiras, 1 primário, 2 secundário)

Linha de transmissão sem perdas ( $L$  coeficiente de auto-indução/m,  $C$  capacidade/m,  $R_L$  resistência de carga no final da linha)

Impedância característica:  $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Factor de reflexão:  $p = \frac{R_L - Z}{R_L + Z}$

Velocidade de propagação:  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  Circuitos trifásicos

Tensão composta:  $U_{12} = \sqrt{3} U_1 = 1,732 U_1$

( $U_1$  tensão simples, ou por fase)

## 5.5. Tabela periódica de elementos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
1 <b>H</b> 1.0079																	2 <b>He</b> 4.0026	
3 <b>Li</b> 6.941	4 <b>Be</b> 9.012											5 <b>B</b> 10.811	6 <b>C</b> 12.0107	7 <b>N</b> 14.0067	8 <b>O</b> 15.9994	9 <b>F</b> 18.9984	10 <b>Ne</b> 20.1797	
11 <b>Na</b> 22.9898	12 <b>Mg</b> 24.3050											13 <b>Al</b> 26.9815	14 <b>Si</b> 28.0855	15 <b>P</b> 30.9738	16 <b>S</b> 32.065	17 <b>Cl</b> 35.453	18 <b>Ar</b> 39.948	
19 <b>K</b> 39.0983	20 <b>Ca</b> 40.078	21 <b>Sc</b> 44.9559	22 <b>Ti</b> 47.867	23 <b>V</b> 50.9415	24 <b>Cr</b> 51.9961	25 <b>Mn</b> 54.9380	26 <b>Fe</b> 55.845	27 <b>Co</b> 58.9332	28 <b>Ni</b> 58.6934	29 <b>Cu</b> 63.546	30 <b>Zn</b> 65.409	31 <b>Ga</b> 69.723	32 <b>Ge</b> 72.64	33 <b>As</b> 74.9216	34 <b>Se</b> 78.96	35 <b>Br</b> 79.904	36 <b>Kr</b> 83.798	
37 <b>Rb</b> 85.4678	38 <b>Sr</b> 87.62	39 <b>Y</b> 88.9059	40 <b>Zr</b> 91.224	41 <b>Nb</b> 92.9064	42 <b>Mo</b> 95.94	43 <b>Tc</b> (98)	44 <b>Ru</b> 101.07	45 <b>Rh</b> 102.906	46 <b>Pd</b> 106.42	47 <b>Ag</b> 107.868	48 <b>Cd</b> 112.411	49 <b>In</b> 114.818	50 <b>Sn</b> 118.710	51 <b>Sb</b> 121.760	52 <b>Te</b> 127.60	53 <b>I</b> 126.904	54 <b>Xe</b> 131.293	
55 <b>Cs</b> 132.905	56 <b>Ba</b> 137.327	56-70 Lanta- nídeos	71 <b>Lu</b> 174.967	72 <b>Hf</b> 178.49	73 <b>Ta</b> 180.948	74 <b>W</b> 183.84	75 <b>Re</b> 186.207	76 <b>Os</b> 190.23	77 <b>Ir</b> 192.217	78 <b>Pt</b> 195.078	79 <b>Au</b> 196.967	80 <b>Hg</b> 200.59	81 <b>Tl</b> 204.384	82 <b>Pb</b> 207.2	83 <b>Bi</b> 208.980	84 <b>Po</b> (209)	85 <b>At</b> (210)	86 <b>Rn</b> (222)
87 <b>Fr</b> (223)	88 <b>Ra</b> (226)	89-102 Acti- nídeos	103 <b>Lr</b> (257)	104 <b>Rf</b> (261)	105 <b>Db</b> (262)	106 <b>Sg</b> (266)	107 <b>Bh</b> (264)	108 <b>Hs</b> (269)	109 <b>Mt</b> (268)	110 <b>Uun</b> (271)	111 <b>Uuu</b> (272)	112 <b>Uub</b> (285)		114 <b>Uuq</b> (289)				

*Exemplo:*

*n.º atómico* → 26  
*massa atómica* → **Fe** ← *símbolo*  
 55.845

Para mais detalhes procurar na Internet: “*periodic table*”

## 5.6. Tabela de conversão de unidades

<i>unidade não SI</i>	<i>símbolo</i>	<i>equivalência no SI</i>	<i>grandeza</i>
acre	acre	= 4046,856 m <sup>2</sup>	área, superfície
ångström	Å	= 10 <sup>-10</sup> m	comprimento
ano	a	= 31 556 952 s	tempo
ano-luz	a.l.	= 9,460 528 × 10 <sup>15</sup> m	comprimento
are	a	= 100 m <sup>2</sup>	área, superfície
atmosfera	atm	= 101 325 Pa	pressão
atmosfera-litro	atm-l	= 101,325 J	energia
bar	bar	= 10 <sup>5</sup> Pa	pressão
barn	B	= 10 <sup>-28</sup> m <sup>2</sup>	área, superfície
barril (US)	US-bl	= 158,987 dm <sup>3</sup>	volume
bohr	A <sub>0</sub>	= 5,291 77 × 10 <sup>-11</sup> m	comprimento
British Thermal Unit	BTU	= 1055,06 J	energia
caloria a 15 °C	calT	= 4,1855 J	energia
caloria internacional	calIT	= 4,1868 J	energia
caloria termoquímica	calth	= 4,184 J	energia
cavalo	hp	= 745,7 W	potência
centipoise	cP	= mPa.s	viscosidade dinâm.
dalton (= u. massa atômica)	Da, u.m.a.	= 1,660 540 × 10 <sup>-27</sup> kg	massa
dia	D	= 86 400 s (por convenção)	tempo
dine	dina	= 10 <sup>-5</sup> N	força
elétron-volt	eV	= 1,602 18 × 10 <sup>-19</sup> J	energia
erg	erg	= 10 <sup>-7</sup> J	energia
galão (UK)	B-gal	= 4,546 09 dm <sup>3</sup>	volume
galão (US)	US-gal	= 3,78541 dm <sup>3</sup>	volume
galileu	Gal	= 10 <sup>-2</sup> m.s <sup>-2</sup>	aceleração
gamma	Γ	= 1 dalton	massa
grão	gr	= 64,798 91 mg	massa
grau angular	°	= 0,017 453 292 radiano	ângulo plano
grau Celsius	°C	= T (K) - 273.15	temperatura
grau Fahrenheit	°F	= 1.8 T (°C) + 32	temperatura
grau Rankine	°R	= (5/9) K	temperatura
hartee	E <sub>h</sub>	= 4,359 75 × 10 <sup>-18</sup> J	energia
hectare	ha	= 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>	área, superfície
hora	h	= 3 600 s	tempo

jarda	jd	= 3 pés = 0.9144 m	comprimento
lambda	$\Lambda$	= $\mu\text{l} = 10^{-6} \text{ dm}^3$	volume
libra	Lb	= 0,453 592 37 kg	massa
libra por polegada quadrada	psi	= $6,894\ 757 \times 10^3 \text{ Pa}$	pressão
litro	l, L	= $\text{dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$	volume
mês	h	= 30 dias (por convenção)	tempo
metro cúbico	$\text{m}^3$	= $1 \text{ m}^3$	volume
mícron	$\mu$	= $\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$	comprimento
milha	mi	= 1760 jd = 1609,344 m	comprimento
milha náutica	m.n.	= 6076,1 pés = 1852 m	comprimento
milha terrestre	m.g.	= 6087,15 pés = 1855 m	comprimento
milímetro de mercúrio	mmHg	= 1 torr	pressão
minuto	min	= 60 s	tempo
minuto angular	'	= 1/60 grau angular	ângulo
onça (avoirdupois)	oz	= 28,3495 g	massa
onça (troy)	oz	= 31,1035 g	massa
parsec	pc	= $3,085\ 68 \times 10^{16} \text{ m}$	comprimento
pé	pé(')	= 12 pol = 0,3048 m	comprimento
poise	P	= $10^{-1} \text{ Pa}\cdot\text{s}$	viscosidade dinâm.
polegada (US)	pol(")	= $2,54 \times 10^{-2} \text{ m}$	comprimento
quilograma	kg	= 1 kg	massa
quilograma-força	kgf	= 9,806 65 N	força
rydberg	Ry	= $2,179\ 87 \times 10^{-18} \text{ J}$	energia
segundo angular	"	= 1/3600 grau angular	ângulo
segundo-luz	s.l.	= 299 792 458 m	comprimento
semana	h	= 7 dias	tempo
stokes	St	= $10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	viscosidade cinem.
svedberg	Sv	= $10^{-13} \text{ s}$	tempo
tonelada métrica	t	= $10^3 \text{ kg}$	massa
torricelli	Torr	= 133,322 Pa	pressão
u. a. de força	u.a.f.	= $8,238\ 73 \times 10^{-8} \text{ N}$	força
u. a. de tempo	u.a.t.	= $2,418\ 88 \times 10^{-17} \text{ s}$	tempo
u. padrão para queda livre	$g_n$	= $9,806\ 65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$	aceleração
unidade astronômica	UA	= $1,496\ 00 \times 10^{11} \text{ m}$	comprimento
unidade x	X	= $1,002 \times 10^{-13} \text{ m}$	comprimento

## 5.7. Características de alguns materiais

Material	Ponto de Fusão (°C)	Ponto de Ebulição (°C)	Condutiv- térmica	Calor espe- cífico cal.g <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup>	Coefficiente Dilat. linear ×10 <sup>6</sup> °C <sup>-1</sup>	Módulo de elasticidade ×10 <sup>10</sup> N.m <sup>-2</sup>	Densidade	Resistividade (a 20 °C) ×10 <sup>8</sup> Ω.m	Coef. temp. resistividade ×10 <sup>3</sup> °C <sup>-1</sup>
Alumínio	660,323	2450	0,057	0,219	23,5	7,06	2,70	2,69	4,2
Antimônio	630,5	1440	0,042	0,050	8 a 11		6,48	42	5,1
Cádmio	320,9	765	0,022	0,0557	31		8,64	7,4	4,3
Chumbo	327,4	1740	0,082	0,0310	29,0		11,68	20,6	3,36
Crômio	1875	2682,7	0,165	0,110	6,5	27,90	7,1	12,9	2,14
Cobalto	1492	2900	0,164	0,102	12,5		8,9	6,24	6,04
Cobre	1084,62	2590	0,94	0,0922	17	12,98	8,96	1,673	4,3
Estanho	231,928	2450	0,155	0,054	11,2	4,99	7,30	12,8	4,2
Ferro	1537	3070	0,17	0,109	12,1	21,14	7,87	9,71	6,51
Gálio	29,7646	2250		0,090	18,3		5,91	8,1 a 54,3 <sup>(47)</sup>	
Germânio	937	2830	0,14	0,074	5,75		5,32	46×10 <sup>6</sup> <sup>(48)</sup>	
Índio	156,5985	2075	0,196	0,058	24,9		7,3	9,0	4,7
Mercúrio	-38,8344	357	0,022	0,033	61		13,546	95,8	0,9
Níquel	1453	2730	0,21	0,108	13,3	21,92	8,9	6,844	6,81
Ouro	1064,18	2950	0,70	0,031	14,1		19,3	2,3	3,9
Platina	1769	4240	0,17	0,0321	9,0		21,45	10,6	3,92
Prata	961,78	2210	1,00	0,054	19,1	8,27	10,5	1,6	4,1
Ródio	1960	4500	0,2	0,060	8,5		12,4	4,7	4,57
Silício	1412	2600	0,2	0,174	7,6		2,34	23×10 <sup>10</sup> <sup>(2)</sup>	
Tântalo	2980	5430	0,130	0,034	6,5	18,75	16,6	13,5	3,8
Titânio	1670	3260	0,041	0,126		12,02	4,5	55	4,1
Tungstênio	3380	5900	0,394	0,033	8,9	41,10	19,3	5,5	4,6
Vanádio	1860	3350	0,07	0,119		12,76	6,1	26	3,4
Zinco	419,527	907	0,265	0,094	8,3	10,45	7,14	5,92	4,2

<sup>47</sup> Consoante o eixo cristalográfico.

<sup>48</sup> Cristal intrínseco (sem impurezas).

## 5.8. Escrita dos números e Unidades

### 5.8.1. Algarismos significativos

Ao escreverem-se números, quer estes sejam provenientes de medidas ou sejam resultados de cálculos, utilizam-se algarismos. Um dos pontos importantes nesta escrita é a de se saber com quantos algarismos é que se deve escrever um determinado número. A resposta a esta questão é simples: o número de algarismos depende da **exactidão** com que se quer representar a grandeza que o número indica. Assim, ao representar o nível de um tanque por 5,73 m está a indicar-se que a precisão da medida é melhor que 0,01 m, ou seja, o nível estará compreendido entre 5,725 m e 5,735 m. Se se indicar o mesmo nível pelo número 5,7 m está-se a representá-lo com menor precisão, um valor compreendido entre 5,65 m e 5,75m. Quando se pretender indicar que este nível é apresentado com uma precisão de 0,001 m deve escrever-se 5,730 m. É aqui que aparece o conceito de **algarismo significativo**, que não deve ser confundido com o de **casa decimal**.

A tabela seguinte é suficiente para esclarecer o que acaba de se expor.

Exemplo n°	Número para o exemplo	n° de algarismos significativos	n° de casas decimais	exactidão
1	3,68	3	2	0,01 ( $\pm 0,005$ )
2	129,7	4	1	0,1 ( $\pm 0,05$ )
3	0,237	3	3	0,001 ( $\pm 0,0005$ )
4	0,0237	3	4	0,0001 ( $\pm 0,00005$ )
5	0,023700	5	6	0,000001 ( $\pm 0,0000005$ )
6	78300	3, 4 ou 5	0	100, 10 ou 1 ( $\pm 50$ , $\pm 5$ ou $\pm 0,5$ )

No caso do n° do exemplo 6, se for relevante para a aplicação em causa, deverá indicar-se qual o número de algarismos significativos. Note-se que de uma forma geral os **zeros à esquerda** de outros algarismos não são significativos. Os **zeros à direita** de outros algarismos são significativos se estiverem incluídos nas casas decimais, podendo sê-lo ou não noutros casos, como no do exemplo 6.

Convém aqui alertar para um facto que pode originar erros muito grandes: aquele em que se efectua o quociente de um número pela diferença de dois números da mesma ordem de grandeza e com o mesmo número de algarismos significativos. Seja o exemplo em que se subtrai 4,384 de 4,391. Qualquer dos números tem 4 algarismos significativos. No entanto a sua diferença, que é 0,007, tem apenas 1 algarismo significativo. Se se tivesse arredondado qualquer dos números para 3 algarismos significativos (4,384  $\rightarrow$  4,38 e 4,391  $\rightarrow$  4,39) a diferença seria 0,01. Se dividir por exemplo 1 por 0,007 obtém-se 142,9, enquanto que se se dividir o mesmo número 1 por 0,01 obtém-se 100,0. Valores substancialmente diferentes!

Em face do exposto recomenda-se que ao efectuar cálculos se utilizem os números com o maior número possível (e prático) de algarismos significativos, deixando para a apresentação dos resultados o número de algarismos significativos adequado.

Os números provenientes de contagens de objectos (números naturais ou inteiros positivos) têm uma precisão muito grande, ou melhor, infinita. O número de algarismos significativos a utilizar dependerá da situação em que se está. Por exemplo, o número natural 27 poderá escrever-se com 3, 9, ... algarismos significativos, consoante a aplicação em que será inserido.

Ao efectuar multiplicações e divisões de números em que cada um deles tem um determinado número de algarismos significativos, o resultado não pode ter mais algarismos significativos do

que o que tem o menor número. Ao efectuar adições e subtracções de números o resultado não pode ter mais algarismos significativos depois da vírgula decimal do que o que tem o menor número de algarismos significativos.

Muitos países utilizam o ponto para indicar a posição da casa decimal de um número pelo que há que ter este facto em atenção.

Na escrita dos números, e para facilitar a leitura, os algarismos podem agrupar-se em conjuntos de 3, separados por um espaço. Exceptuam-se os casos em que há apenas 4 casas decimais.

Exemplos:

1000 → 1 000; 87532 → 87 532; 1538,45117 → 1 538,451 17; 0,1234 → 0,1234 (e não 0,123 4)

### 5.8.2. Notação científica

A notação científica é uma forma prática de escrever números que contêm muitos zeros, à esquerda ou à direita da vírgula. Para o efeito o número escreve-se sob a forma de um produto de um número compreendido entre 1 e 10, multiplicado por uma potência de 10. Convém aqui recordar que  $10^2=10 \times 10=100$ ;  $10^3=1\ 000$ ;  $10^6=1\ 000\ 000 \dots$  e que  $10^1=10$ ;  $10^0=1$ ;  $10^{-1}=0,1$ ;  $10^{-2}=0,01$ ;  $10^{-6}=0,000\ 001$ ; ... A tabela seguinte mostra alguns números escritos na forma científica

<i>Exemplo n°</i>	<i>Número para o exemplo</i>	<i>Número na forma científica</i>	<i>Número de algarismos significativos</i>
1	368	$3,68 \times 10^2$	3
2	129 700	$1,297 \times 10^5$ $1,2970 \times 10^5$ $1,29700 \times 10^5$	4 5 6
3	0,237	$2,37 \times 10^{-1}$	3
4	0,023700	$2,37 \times 10^{-2}$	3
5	1 789 376 125	$1,789\ 376\ 125 \times 10^9$	10
6	0,000 000 078 3	$7,83 \times 10^{-8}$	3

Num número escrito em notação científica o número de algarismos significativos é igual ao número de algarismos do número que multiplica pela potência de 10.

A notação científica é útil quando se multiplicam ou dividem números. Utilizam-se no cálculo as regras seguintes:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \quad 10^n \div 10^m = 10^{n-m} \quad (10^n)^m = 10^{n \times m}$$

Assim, por exemplo,  $(3,68 \times 10^2) \times (7,83 \times 10^{-8}) = 3,68 \times 7,83 \times 10^{2-8} = 28,81 \times 10^{-6} = 2,881 \times 10^{-5}$

$$(3,68 \times 10^2) \div (7,83 \times 10^{-8}) = 3,68 \div 7,83 \times 10^{2-(-8)} = 0,470 \times 10^{10} = 4,70 \times 10^9$$

$$(3,68 \times 10^2)^3 = (3,68)^3 \times (10^2)^3 = 49,84 \times 10^6 = 4,984 \times 10^7.$$

### 5.8.3. Arredondamentos

Muitas vezes tem interesse apresentar um número com menos casas decimais do que aquelas que ele tem. Diz-se então que se faz um **arredondamento**. Assim, por exemplo, o número

315,72 ao ser arredondado para as décimas escreve-se 315,7. O mesmo número se arredondado para as unidade ficaria em 316. O arredondamento para a casa decimal imediatamente acima obedece às seguintes regras: Se o algarismo da casa decimal a arredondar for inferior a 5 o número é truncado; se for superior a 5 a casa anterior sobe uma unidade; se for igual a 5, a casa anterior arredonda para o **número par** mais próximo. Dão se a seguir alguns exemplos.

<i>Exemplo n°</i>	<i>Número para o exemplo</i>	<i>Arredondamento de uma casa decimal</i>	<i>Arredondamento de duas casas decimais</i>
1	18,644	18,64	18,6
2	18,646	18,65	18,6
3	23,75	23,8	24
4	23,85	23,8	24
5	0,0237	0,024	0,02
6	237 128	237 130	237 100

O arredondamento para duas casas decimais acima obedece às seguintes regras: Se os algarismos das casas decimais a arredondar formarem um número inferior a 50 o número é truncado, isto é, faz-se por defeito; se for superior a 50 o arredondamento faz-se por excesso; se for igual a 50, o número é arredondado para o número par mais próximo.

Exemplos (para além dos anteriores): 18,6450 → 18,64; 18,6750 → 18,68.

De modo semelhante se fazem os arredondamentos de mais do que duas casas decimais.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Physics for Scientists and Engineers, with Modern Physics, 5th edition  
Raymond A. Serway, Robert J.  
Beichner / Saunders College Publishing – 2000
  
- [2] Physics For Scientists and Engineers, with Modern Physics  
Douglas C. Giancoli  
Prentice Hall – 2000
  
- [3] Physics, with Modern Physics  
R. Wolfan, J. M. Sasachaf  
Adison Wesley – 1999
  
- [4] Introdução à Física  
Jorge Dias de Deus e  
Mc Graw Hill – 2000
  
- [5] Fundamentos de Física – Ótica e Física Moderna  
Halliday, Resnick, Walker  
Livros Técnicos e Científicos – 1993
  
- [6] O Princípio da Relatividade  
H. A. Lorenz, A. Einstein, H. Minkowsky  
(Tradução do original alemão pelo Prof. Manuel dos Reis)  
Fundação Calouste Gulbenkian – 1971
  
- [7] Introdução à Teoria da Relatividade Restrita  
João M. Resina  
IST Press – 1998